ESECONOMÍA, vol XIX, núm 60, enero-junio de 2024, pps 79-98

Valuación de Opciones Asiáticas: Comparación de Métodos Analíticos y Simulación Montecarlo

Nora Gavira-Duron* Muhammad Kashif **

(Recibido: abril 2024/Aceptado: junio 2024)

Resumen

El presente trabajo se calcula la valoración de opciones asiáticas del tipo europeo, utilizando la Aproximación Turnbull y Wakeman, la aproximación de Levy; así como la simulación Montecarlo. Se busca determinar la eficiencia de estas técnicas y comparar los resultados obtenidos. Los resultados indican que las aproximaciones analíticas ofrecen una alternativa viable a los métodos numéricos, proporcionando cálculos más rápidos y eficientes; además, se destaca la relevancia de las técnicas de simulación Montecarlo, que, aunque más complejas, permiten una mayor flexibilidad en la valoración de opciones con estructuras más complicadas. Una de las novedades de este trabajo es la integración de diferentes enfoques teóricos y prácticos para la valoración de opciones asiáticas, lo que contribuye a una mejor comprensión de su funcionamiento y aplicación en el ámbito financiero.

Palabras clave: Opciones asiáticas, simulación Montecarlo, métodos numéricos.
Clasificación JEL: C02, C13, C63, G13

*Universidad de las Américas Puebla. Correo electrónico: nora.gavira@udlap.mx
**Universidad de las Américas Puebla. Correo electrónico: muhammad.kashif@udlap.mx

Asian Options Valuation: Comparison of Analytical Methods and Montecarlo Simulation

Nora Gavira-Duron* Muhammad Kashif **

(Recibido: abril 2024/Aceptado: junio 2024)

Abstract

The present work calculates the valuation of Asian options of the European type, using the Turnbull and Wakeman Approximation, the Levy approximation; as well as Montecarlo simulation. The aim is to determine the efficiency of these techniques and compare the results obtained. The results indicate that analytical approaches offer a viable alternative to numerical methods, providing faster and more efficient calculations; Furthermore, the relevance of Montecarlo simulation techniques is highlighted, which, although more complex, allow greater flexibility in the valuation of options with more complicated structures. One of the novelties of this work is the integration of different theoretical and practical approaches for the valuation of Asian options, which contributes to a better understanding of their operation and application in the financial field.

Keywords: Asian options, Montecarlo simulation, numerical methods.
JEL Code: C02, C13, C63, G13

1. Introducción

Desde finales de los años sesenta, las opciones exóticas comenzaron a negociarse en mercados Over The Counter (OTC) en los principales mercados financieros del mundo. Sin embargo, no fue hasta la década de los noventa cuando su negociación ganó relevancia. Fernández y Ariño (1996) define las opciones exóticas como aquellas que no son tradicionales y surgieron para reducir el costo de las primas de las opciones tradicionales. También se conocen como opciones de segunda generación, ya que superan las limitaciones de las opciones tradicionales mediante modificaciones basadas en una opción vainilla.

*Universidad de las Américas Puebla. `Correo electrónico: nora.gavira@udlap.mx`
**Universidad de las Américas Puebla. `Correo electrónico: muhammad.kashif@udlap.mx`

Una opción asiática es una opción exótica para la que el valor de la prima se calcula con el promedio del precio del activo subyacente a lo largo dura la opción, también se puede calcular, sólo utilizando un subintervalo de ese tiempo. A estas opciones, también se les llama opciones promedio (Clewlow & Strickland, 1997), se utilizan para mitigar los efectos de cambios bruscos en el precio del activo subyacente y en situaciones donde se requiere regularidad temporal. Las primas de las opciones asiáticas son menores que las de las opciones tradicionales porque su valuación considera la volatilidad media de los precios del subyacente a lo largo de la vida de la opción, la cual es siempre menor que la volatilidad del precio del subyacente individual. A menor volatilidad, menor es el precio de la prima.

En el ámbito financiero, la valoración precisa de los instrumentos es esencial para la toma de decisiones informadas. Las opciones asiáticas presentan un desafío único debido a su estructura basada en el promedio de los precios subyacentes durante un período específico; para abordar esta complejidad, los métodos numéricos y la simulación Montecarlo, se han convertido en herramientas indispensables.

Autores como Rogers y Shi (1995), y Nielsen y Sandmann (2003) se centraron en la valoración de opciones asiáticas discretas de tipo europeo utilizando la media geométrica. Consideraron los límites superior e inferior mediante opciones call europeas con pagos retrasados y métodos numéricos, sentando las bases para el análisis de estas opciones complejas. Y dado que en particular las aritméticas son notoriamente difíciles de valuar, debido a la falta de soluciones analíticas cerradas, Milevsky y Posner (1998) emplearon técnicas avanzadas para obtener la función de densidad de probabilidad de la suma infinita de variables aleatorias lognormales correlacionadas y mostraron que esta función tiene una distribución gamma recíproca bajo ciertas restricciones de parámetros.

La simulación Montecarlo es una técnica computacional que utiliza el muestreo aleatorio para obtener resultados numéricos, siendo especialmente útil en finanzas para modelar y valorar activos con múltiples fuentes de incertidumbre. En el caso de las opciones asiáticas, permite capturar la variabilidad y los riesgos asociados al precio subyacente durante el periodo de vida de la opción.

Raju (2004) y; Arnold y Henry (2005) ejemplificaron cómo dos opciones exóticas dependientes de una misma ruta pueden valuarse utilizando simulaciones de Montecarlo en Excel, haciendo estas técnicas más accesibles para la práctica profesional. Mientras que Báez y Rodríguez (2007) utilizaron el programa Mathematica para implementar el valor de una opción asiática aritmética, comparando sus resultados con métodos tradicionales y demostrando mejoras significativas. Posteriormente, Patie (2013) generalizó la fórmula Geman-Yor en términos de series de potencias para la fijación de precios de opciones asiáticas, considerando activos espectralmente negativos impulsados por modelos de Lévy, lo que amplió el ámbito de aplicación de estos modelos.

Ortiz Ramírez y Martínez Palacios (2016) propusieron una metodología para obtener el precio de una opción asiática con subyacente promedio mediante simulación Montecarlo. Este enfoque fue posteriormente ampliado por Matías González *et al.* (2019), quienes valoraron opciones asiáticas con procesos estocástico y simulación Montecarlo. Mientras que, Gavira-Durón y Galindo (2017) aplicaron métodos numéricos para valuarlas, consolidando así el uso de técnicas cuantitativas en la valoración de estas opciones.

Kahale (2020) analizó métodos generales de Montecarlo multinivel para estimar el precio de una opción asiática en fechas fijas, contribuyendo a mejorar la precisión y eficiencia de estas valoraciones. Gao *et al.* (2021) diseñaron modelos numéricos para valuar opciones arcoíris asiáticas bajo el supuesto de que los precios de las acciones siguen un comportamiento guiado por ecuaciones diferenciales inciertas impulsadas por procesos independientes de Liu, ampliando así la gama de herramientas disponibles para los analistas financieros.

Han y Hong (2022) definieron y analizaron diversos métodos para valuar opciones asiáticas, concluyendo que el método de simulación de Montecarlo es una buena aproximación para opciones asiáticas de media aritmética. Y, Ding *et al.* (2023) propusieron una nueva fórmula explícita de expansión en serie para el precio de una opción asiática aritmética bajo el modelo de Black-Scholes y el modelo de difusión de salto de Merton, ofreciendo una alternativa analítica a los métodos numéricos.

Xu *et al.* (2023) corrigieron la volatilidad de los activos en el modelo de Black-Scholes utilizando un modelo GARCH. Además, mejoraron la baja tasa de convergencia de errores del método de Montecarlo utilizando técnicas de reducción de varianza y el enfoque cuasi-Montecarlo basado en secuencias de baja discrepancia para refinar aún más la tasa de convergencia de errores.

Finalmente, Shokrollahi *et al.* (2024) emplearon movimiento browniano fraccionario mixto con saltos modelados por el proceso de Poisson y derivaron una fórmula analítica para valorar opciones geométricas asiáticas, aportando una nueva perspectiva teórica.

Por lo anterior, el presente trabajo se centra en mostrar una aplicación de valuación de opciones asiáticas del tipo europeo, utilizando la Aproximación Turnbull y Wakeman (1991) y la aproximación de Levy (1992) ; así como la simulación Montecarlo; para determinar su eficiencia y comparar los resultados de las metodologías.

Exploraremos los fundamentos teóricos de estos instrumentos financieros, así como los pasos específicos necesarios para implementar estas técnicas; además, discutiremos las ventajas y limitaciones de estos enfoques, mostrando su utilidad en el ámbito financiero.

2. Opciones Asiáticas

Las opciones asiáticas tienen la característica principal de que su precio depende de la trayectoria del subyacente durante el periodo de vigencia, esto significa que su valor al vencimiento no solo depende del precio del subyacente en un momento específico, sino también de su evolución a lo largo del tiempo. Estas opciones, también conocidas como opciones de promedio, se utilizan de forma eficaz en mercados donde se realizan negociaciones de productos primarios de reciente cotización, su uso puede evitar la manipulación del precio cerca del final del periodo de vigencia, un problema común en las opciones ordinarias.

La investigación sobre las opciones asiáticas y sus posibles aplicaciones han sido tema de autores como Pesce *et al.* (2019) , quienes realizaron una investigación literaria sobre ellas para mostrar su importancia tanto en el ámbito académico como en su aplicación práctica. Su estudio y aplicación pueden impactar significativamente a los mercados internacionales de capitales, debido a que son herramientas útiles tanto para la gestión de riesgos como para la especulación. Sin embargo, su uso no se ha generalizado, excepto en el mercado energético (CME Group, 2020), debido al desconocimiento sobre su existencia, la poca oferta en los mercados de derivados, la dificultad para establecer el precio de sus primas y la escasa difusión de sus ventajas por parte de los investigadores (Espert- Crespo, 2001).

Además, las opciones asiáticas son útiles para entidades financieras que realizan transacciones y realizan pagos en diversas divisas, la media de las cotizaciones de estas divisas pueden ser una protección contra las variaciones del tipo de cambio, proporcionando estabilidad en las operaciones internacionales. Por lo general se negocian las de tipo europeo; esto se debe a que las opciones de tipo americano, que permiten el ejercicio anticipado desde el comienzo del periodo, perderían la capacidad de protección durante el tiempo restante, haciendo menos efectiva su principal ventaja.

Las opciones asiáticas más comunes son aquellas que, al vencimiento, ofrecen un pago igual a la diferencia positiva entre el precio promedio del activo subyacente durante un periodo predeterminado y el precio de ejercicio. Estas opciones son especialmente ventajosas en situaciones donde se requiere una regularidad temporal, como la adquisición periódica de materias primas y otros suministros, así como en operaciones de importación y exportación con características similares de regularidad temporal.

También disminuyen la exposición a la volatilidad del subyacente justo antes de su vencimiento. Esta característica es aprovechada por algunos esquemas de pensiones para minimizar el riesgo asociado con las fluctuaciones bruscas del mercado.

2.1. Tipos de Payoff

Las opciones asiáticas se diferencian de las opciones vainilla (tradicionales) porque su precio se basa en el promedio de los precios del activo subyacente a lo largo de su vida; esto reduce la volatilidad en comparación con las opciones vainilla, cuyo precio depende del subyacente en un momento específico. La volatilidad media del subyacente en las opciones asiáticas es menor que la volatilidad en un solo punto del tiempo, ya que el promedio suaviza las fluctuaciones extremas, lo que hace que el costo de las opciones asiáticas sea más bajo.

El payoff de una opción se refiere al beneficio económico obtenido al ejercerla. Este valor depende del tipo de opción (call o put), del precio de ejercicio K (strike price) y del precio del activo subyacente en el momento del ejercicio S_T. Pueden ser de dos tipos:

1. Opciones Average Strike (con precio de ejercicio promedio): El precio de ejercicio se reemplaza por un promedio de los precios que va tomando el subyacente durante la vida del contrato. Esto afecta el cálculo del payoff de la siguiente forma:

   Payoff de una Average Strike Call:

$$Payoff = \text{máx}\,(S_t - S_{ave}, 0) \tag{1}$$

   Payoff de una Average Strike Put:

$$Payoff = \text{máx}\,(S_{ave} - S_T, 0) \tag{2}$$

   Donde S_T es el precio del subyacente al vencimiento y S_{ave} es el promedio de los precios del subyacente.

2. Opciones Average Rate (de Tasa Promedio): el payoff se calcula reemplazando el precio del subyacente al vencimiento por el promedio de los precios del subyacente:

   Payoff de una Average Rate Call:

$$Payoff = \text{máx}\,(S_{ave} - K, 0) \tag{3}$$

   Payoff de una Average Rate Put

$$Payoff = \text{máx}\,(K - S_{ave}, 0) \tag{4}$$

Donde S_T es el precio del subyacente al vencimiento y S_{ave} es el promedio de los precios del subyacente.

Los tipos más utilizados de opciones asiáticas son las Average Rate, cuyo valor depende del promedio de los precios del subyacente durante la vida de la opción. Estas opciones ayudan a mitigar la manipulación de precios y ofrecen protección contra grandes variaciones del mercado.

Las opciones Average Strike, aunque menos negociadas, garantizan que la media de los precios de los activos no supere al precio final (en el caso de un call) o que la media sea mayor que el precio final (para un put). De acuerdo con la forma de calcular la media, se determinan opciones de media aritmética o geométrica.

Las opciones asiáticas también se pueden clasificar, de acuerdo con el periodo de tiempo en que se calcula el promedio:

- Forward-starting options: La media se calcula en un intervalo de tiempo futuro.
- Backward-starting o plain vanilla: El periodo de tiempo que se utiliza para calcular la media, es mayor al que se utiliza para determinar el vencimiento.

Esta clasificación ayuda a los inversores a seleccionar el tipo de opción asiática que mejor se adapta a sus necesidades y estrategias de inversión.

3. Modelos de evaluación

Debido a que no contamos con una fórmula cerrada para el precio de las opciones con promedio aritmético, a diferencia de las opciones europeas estándar que utilizan la fórmula de Black-Scholes; por lo que se emplean métodos numéricos para su aproximación. Estos métodos, como la simulación de Montecarlo, permiten resolver problemas matemáticos complejos a través de algoritmos iterativos o aproximaciones.

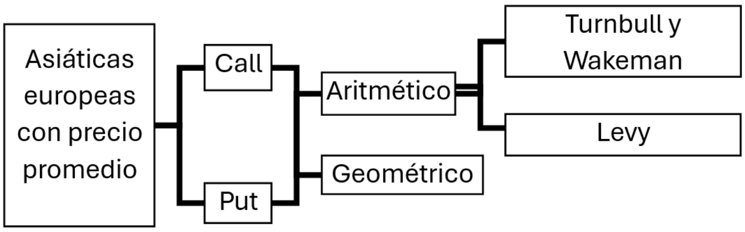
En esta sección se describirán los métodos para la valuación de opciones asiáticas de tipo europeo con precio promedio de tipo aritmético para un put y un call para la Aproximación Turnbull y Wakeman y la de Levy, como se muestra en la figura 1:

Una opción asiática de tipo europeo es una opción financiera en la que el valor se determina en función del promedio de los precios del subyacente durante un periodo determinado y solamente se puede ejercer en una fecha determinada en el vencimiento.

Por otro lado, se analizará el método de Simulación Montecarlo para el mismo tipo de opciones.

Figura 1

Modelos de aproximación Turnbull y Wakeman, y de Levy.



Fuente: elaboración propia.

3.1. Aproximación Turnbull y Wakeman

Turnbull y Wakeman (1991) desarrollaron una fórmula analítica aproximada para valuar opciones asiáticas de tipo europeo que se desarrolla por medio de un ajuste en la fórmula de Black-Scholes para capturar la media aritmética de los precios subyacentes en lugar del precio spot. considera que la distribución del promedio aritmético de los precios del subyacente es aproximadamente lognormal, basándose en que el precio del activo subyacente sigue el mismo tipo de distribución. Utilizando los primeros y segundos momentos del precio promedio aritmético, es decir, la media y la varianza, pudieron aproximar la distribución lognormal y, por tanto, el precio de la opción call y put; como se muestra a continuación:

$$c \approx S_0 e^{(r_A - r)} N(d_1) - X e^{-rT} N(d_2) \tag{5}$$

$$p \approx X e^{-rT} N(-d_2) - S_0 e^{(r_A - r)} N(-d_1) \tag{6}$$

donde:

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_0}{T} + \left(r_A + \frac{\sigma_A^2}{2} \right) T}{\sigma_A \sqrt{T}}, \tag{7}$$

y

$$d_2 = d_1 - \sigma_A \sqrt{T} \tag{8}$$

La tasa libre de riesgo del promedio y la volatilidad están dados por:

$$r_A = \frac{\ln M_1}{T} \tag{9}$$

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{\ln M_2}{T} - 2r_A} \tag{10}$$

Los primeros dos momentos del promedio aritmético son:

La tasa libre de riesgo del promedio y la volatilidad están dados por:

$$M_1 = \frac{e^{(rT)-1}}{rT} \tag{11}$$

$$M_2 = \frac{2e^{(2(r-q)+\sigma^2)T}}{((r-q)+\sigma^2)(2(r-q)+\sigma^2)T^2} + \frac{2}{(r-q)T^2}\left(\frac{1}{2(r-q)+\sigma^2} - \frac{e^{(r-q)T}}{(r-q)+\sigma^2}\right) \tag{12}$$

Las principales ventajas de este método, es que, a diferencia de la simulación Montecarlo, permite cálculos rápidos y eficientes. Esto es particularmente útil para valuaciones en tiempo real y para escenarios donde se requieren múltiples valoraciones simultáneas.

La fórmula es relativamente simple de implementar y aplicar, no requiere el diseño y ejecución de complejos algoritmos de simulación, lo que facilita su uso en aplicaciones prácticas y en software financiero estándar. Además, proporciona un resultado determinístico en lugar de uno basado en la media de múltiples simulaciones. Esto elimina la variabilidad inherente a los métodos de Montecarlo, ofreciendo una única valoración clara y definida.

3.2. Aproximación de Levy's

La aproximación de Levy (1992) para valuar opciones asiáticas de tipo europeo utiliza una transformación del precio subyacente para simplificar la valoración, que permite utilizar la media geométrica para aproximar la media aritmética de los precios subyacentes.

$$c \approx S_E N(d_1) - Xe^{-rT} N(d_2) \tag{13}$$

donde

$$S_E = \frac{S_0}{(r-q)T}\left(e^{-qT} - e^{-rT}\right) \tag{14}$$

$$d_1 = \frac{1}{\sqrt{V}}\left[\frac{\ln D}{2} - \ln X\right],\ d_2 = d_1 - \sqrt{V} \tag{15}$$

$$V = \ln D - 2\left[(r-q)T + \ln S_E\right] \tag{16}$$

$$D = \frac{M}{T^2} \tag{17}$$

$$M = \frac{2S_0^2}{(r-q)+\sigma^2}\left[\frac{e^{(2(r-q)+\sigma^2)T}}{2(r-q)+\sigma^2} - \frac{e^{(r-q)T} - 1}{(r-q)}\right] \tag{18}$$

Para determinar la opción put se utiliza la paridad put-call:

$$p = c - S_E + Xe^{-rT} \tag{19}$$

La aproximación de Levy es muy precisa bajo ciertas condiciones del mercado y del modelo subyacente, cuando las opciones tienen vencimientos cortos y volatilidades bajas. Evita la complejidad de las simulaciones y ofrece una solución más directa y sencilla de implementar.

3.3. Método de Simulación Montecarlo

El método de simulación Montecarlo (Alziary *et al.*, 1997) es una técnica ampliamente utilizada para valuar opciones asiáticas europeas, ya sean average strike o average price, put o call, y utilizando tanto promedios geométricos como aritméticos. Este método es relativamente fácil para implementar, pero requiere la utilización de un método eficiente para generar números aleatorios y así obtener resultados precisos.

Pasos para Implementar la Simulación Montecarlo se deben seguir los siguientes pasos:

1. Se generación de Trayectorias Aleatorias:

    - Se simulan múltiples trayectorias del precio del activo subyacente

- Cada trayectoria representa una posible evolución del precio del subyacente a lo largo del tiempo siguiendo un modelo de movimiento browniano o algún otro modelo estocástico adecuado.

2. Cálculo del Promedio Final:

   - Para cada trayectoria, se calcula el promedio del precio del subyacente.
   - Este promedio puede ser geométrico o aritmético, dependiendo del tipo de opción asiática.
   - Se calculan diferentes tipos de promedios, como el precio promedio (average price) o el promedio de ejercicio (average strike).

3. Valor Presente del Payoff:

   - Se determina el payoff correspondiente a cada trayectoria simulada.
   - El payoff se calcula como la diferencia positiva entre el promedio del precio del subyacente y el precio de ejercicio, o viceversa, según el tipo de opción.
   - El valor presente del payoff se obtiene descontándolo a la tasa libre de riesgo.
   - Este proceso se repite para todas las trayectorias simuladas.

4. Promedio de los Valores Presentes:

   - Se calcula el promedio de los valores presentes de todas las trayectorias simuladas.
   - Este promedio representa un estimado del valor esperado del payoff.

5. Descuento a la Tasa Libre de Riesgo:

   - Finalmente, el valor esperado del payoff se descuenta a la tasa libre de riesgo.
   - Este descuento proporciona un estimado del valor actual de la opción.

3.3.1. Modelo Matemático (Hull & Basu, 2016)

Si se considera que el precio de un instrumento derivado solo depende de una variable de mercado S_T que tiene un payoff en el tiempo T. Y suponemos una tasa de interés constante; entonces, el derivado se puede valuar de la siguiente manera:

1. Modelar un camino aleatorio para S:

- El proceso que sigue el precio del activo subyacente S con formulación de riesgo neutral se describe mediante la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dS = rSdt + \sigma Sdz \tag{20}$$

  Donde: dz es un proceso de Wiener,
  r es la tasa libre de riesgo, y
  σ es la volatilidad del subyacente.

2. Simulación del Camino:

- Para simular la trayectoria de S, se divide la vida del derivado en N intervalos de longitud Δt.
- La ecuación diferencial estocástica se aproxima mediante:

$$S(t+\Delta t) - S(t) = rS(t)\Delta t + \sigma S(t)\varepsilon\sqrt{\Delta t} \tag{21}$$

  que se reescribe como:

$$S(t+\Delta t) = S(t) + rS(t)\Delta t + \sigma S(t)\varepsilon\sqrt{\Delta t} \tag{22}$$

  donde es una muestra aleatoria con una distribución normal estándar con media cero y desviación estándar 1.

- Este proceso se repite usando N muestras aleatorias para construir una trayectoria completa de S.

3. Calcular el payoff:

- Para calcular la trayectoria simulada, se calcula el payoff del derivado en el tiempo T.
- Esto implica calcular el valor de S en los tiempos Δt, $2\Delta t$, $N\Delta t$.

4. Repetición y Promediado:

- Los pasos anteriores se repiten para un gran número de trayectorias simuladas.
- Se calcula el promedio de los payoffs obtenidos de estas trayectorias para estimar el valor esperado del payoff en una formulación de riesgo neutral.

5. Descuento del valor esperado:

- El valor esperado del payoff se descuenta a la tasa libre de riesgo para obtener un estimado del valor actual del derivado.

Detalles Adicionales sobre el Proceso de Simulación: Para simular la trayectoria del precio del subyacente S de manera precisa, se utiliza el lema de Itô, una herramienta fundamental en el cálculo estocástico. Aplicando el lema de Itô al proceso seguido por S, se obtiene:

$$S(t+\Delta t) = S(t)e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}Z} \tag{23}$$

Dónde Z es una variable aleatoria que sigue una distribución normal estándar. Esta fórmula permite construir una trayectoria para S de manera que capture correctamente la dinámica del precio del subyacente a lo largo del tiempo.

Para valuar opciones asiáticas, es necesario conocer la trayectoria completa del precio del subyacente desde S(0) hasta S(T) ya que el valor de una opción asiática depende del promedio de los precios del subyacente durante su vida. Por lo que, un proceso estocástico que modele S puede ser utilizado en la simulación Montecarlo para capturar la variabilidad y los riesgos asociados al precio del subyacente durante el periodo de vida de la opción.

3.3.2. Algoritmo de aplicación

La simulación Montecarlo requiere realizar una gran cantidad de simulaciones para obtener resultados precisos, lo que puede ser muy costoso en términos de tiempo y recursos computacionales. Esto es especialmente cierto para opciones con vencimientos largos o para estructuras de opciones complejas. Los resultados están sujetos a variabilidad aleatoria, por lo que se necesita un número significativo de simulaciones para reducir el error, lo que incrementa el costo computacional. Según Huang y Zhu (2020), el cálculo se realiza de la siguiente manera:

1. La función se define con los siguientes parámetros: S_0: Precio inicial del activo subyacente,
   X: Precio de ejercicio,
   T: Tiempo hasta el vencimiento,
   Periodos: Número de periodos de la simulación,
   Trayectorias: Número de trayectorias a simular,
   r: Tasa de interés libre de riesgo,

q: Dividendo, y

σ: Volatilidad.

2. Se inicializa un contador $cont = 0$ que acumulará los payoffs obtenidos en cada trayectoria simulada.

3. Ciclo Principal para Trayectorias:

   - Se realiza un ciclo que va desde 1 hasta n trayectorias.
   - En cada iteración del ciclo, se inicializan las variables $s = S_0$ y $S_{ave} = S_0$.

4. Ciclo Secundario para Periodos:

   Dentro del ciclo principal, se realiza un ciclo secundario que va desde 1 hasta m periodos.

   Se actualiza el valor de S, utilizando la formula:

$$s = se^{(r-q)\left(\frac{T}{periodos}\right)+\sigma\sqrt{\frac{T}{periodos+aleatoriosNormal(0,1)}}} \tag{24}$$

   donde $aleatorioNormal(0,1)$ es una función que genera números aleatorios con distribución normal estándar de media 0 y varianza 1.

5. Cálculo del nuevo promedio:

   Se calcula S_ave, utilizando el nuevo valor de s. Por ejemplo, para el promedio aritmético:

$$S_{ave} = \frac{S_{ave} * (periodo-1) + s}{periodo} \tag{25}$$

   donde periodo es el índice del ciclo secundario.

6. Cálculo y acumulación del payoff :

   Se calcula el payoff de la opción para la trayectoria actual y se acumula en el contador:

$$cont = cont + payoff \tag{26}$$

7. Devolución del Valor Medio del Contador:

   Finalmente, la función devuelve el valor medio del contador, ajustado por el factor de descuento a la tasa libre de riesgo:

$$\frac{contador}{trayectorias}e^{-rT} \tag{27}$$

Este método de simulación Montecarlo permite capturar la variabilidad y los riesgos asociados al precio del subyacente durante el periodo de vida de la opción, proporcionando una herramienta valiosa para la valoración de derivados complejos.

4. Ejemplo de aplicación

Si se considera una opción call asiática de tipo europeo, con precio promedio aritmético y utilizamos los siguientes parámetros: precio de subyacente de 100 unidades monetarias, precio de ejercicio 100 unidades monetarias, periodo de tiempo de 1 año, con una tasa libre de riesgos $r = 0.05$ y volatilidad $\sigma = 0.15$.

Para los modelos de aproximación de Turnbull y Wakeman, y de Levy, que suelen utilizar fórmulas cerradas bajo el supuesto de lognormalidad, los resultados pueden ser menos precisos. Sin embargo, utilizando los mismos parámetros, estos modelos arrojan resultados similares, como se puede observar en el cuadro 1.

Cuadro 1

Comparación de resultados de los modelos de aproximación Turnbull y Wakeman, y de Levy

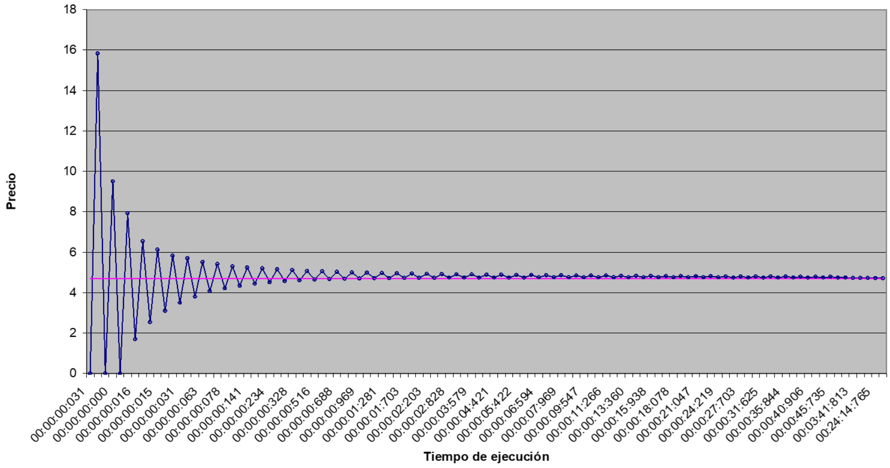
Aproximación Turnbull y Wakeman	Levy's
4.447643114349148	4.447688799406635

Fuente: elaboración propia en R-project

Para estos parámetros, el modelo de Simulación Montecarlo es de fácil implementación y arroja el siguiente resultado que se muestra en la figura 2

Figura 2

Simulación de precio promedio, call, europea, promedio aritmético.



Fuente: elaboración propia en R-project.

El tiempo de cálculo y el resultado se puede ver en el cuadro 2.

Cuadro 2

Tiempo de cálculo y resultado de la Simulación Montecarlo.

minutos:segundos.milisegundos	Precio
00:11.781	5.279457
00:13.234	4.124082
00:01.540	4.676748
00:02.037	4.198489
00:02.672	3.978793
00:06.908	4.465655
00:08.114	4.698098
00:04.931	4.570041
00:06.022	4.570301
00:09.187	4.717083
00:10.513	4.984679
00:03.362	4.491440
00:04.121	4.360668

Continua en la página siguiente.

minutos:segundos.milisegundos	Precio
00:14.790	4.810702
00:16.373	4.723250
00:00.668	4.319864
00:01.033	4.131186

Fuente: elaboración propia en R-project

El precio promedio de las simulaciones es de 4.5353 unidades monetarias

A pesar de las diferencias en los enfoques, se observó que los resultados obtenidos a través de las aproximaciones analíticas y la simulación Montecarlo son comparables bajo las mismas condiciones y parámetros, lo que sugiere que ambas metodologías pueden ser utilizadas de manera complementaria.

La investigación destacó que las opciones asiáticas, debido a su estructura basada en el promedio de precios, presentan primas más bajas en comparación con las opciones tradicionales. Esto se debe a que su valoración considera la volatilidad media de los precios del subyacente, que es generalmente menor que la volatilidad de los precios individuales.

5. Conclusiones

Dentro de los principales resultados al realizar este ejercicio, se encontró que las aproximaciones de Turnbull y Wakeman (1991) y de Levy (1992) son herramientas efectivas para la valoración de opciones asiáticas de tipo europeo. Estas metodologías permiten obtener resultados determinísticos de manera rápida y eficiente, lo que es especialmente útil en escenarios de valoración en tiempo real.

Aunque la simulación Montecarlo ofrece una flexibilidad considerable y es aplicable a una amplia variedad de problemas, su costo computacional y la necesidad de técnicas avanzadas para mejorar la precisión hacen que las aproximaciones analíticas sean preferibles en muchos contextos prácticos. Los resultados de la simulación, aunque confiables, requieren más recursos y tiempo de cálculo.

A pesar de su potencial, las opciones asiáticas no se han generalizado en todos los mercados financieros, lo que puede deberse a la falta de conocimiento sobre su existencia y beneficios, así como a la escasa oferta en los mercados de derivados. Se identificó que su valuación es particularmente desafiante debido a la falta de soluciones analíticas cerradas, esto resalta la necesidad de seguir desarrollando métodos numéricos y analíticos para abordar estas dificultades.

Los modelos utilizados en este ejercicio, dependen de supuestos sobre la distribución de precios y la volatilidad, lo que puede afectar la precisión de las valoraciones en situaciones de mercado real. En última instancia, la elección del método dependerá de las especificidades del problema a resolver, los recursos disponibles y la necesidad de precisión en la valoración.

Referencias

Alziary, B., Décamps, J.-P., & Koehl, P.-F. (1997). A PDE approach to Asian options: analytical and numerical evidence. *Journal of Banking & Finance*, *21*(5), 613-640.

Arnold, T., & Henry, S. C. (2005). An excel application for valuing european options with monte carlo analysis. *Journal of Financial Education*, 86-97. http://www.jstor.org/stable/41917728

Báez, D. I. C., & Rodríguez, J. M. G. (2007). Valoración de opciones asiáticas con Mathematica. *Rect@: Revista Electrónica de Comunicaciones y Trabajos de ASEPUMA*, *8*(1), 139-150. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2387787

Clewlow, L., & Strickland, C. M. (1997). Exotic options : the state of the art. https://api.semanticscholar.org/CorpusID:160658058

CME Group. (2020). Energy average price options. https://www.cmegroup.com/education/articles-and-reports/energy-average-price-options.html

Ding, K., Cui, Z., & Yang, X. (2023). Pricing arithmetic Asian and Amerasian options: A diffusion operator integral expansion approach. *Journal of Futures Markets*, *43*(2), 217-241. https://doi.org/https://doi.org/10.1002/fut.22387

Espert- Crespo, J. L. (2001). Utilización práctica de las opciones exóticas: Opciones asiáticas y opciones barrera. *Boletín Económico de ICE, Información Comercial Española*, (2686), 1001-1008.

Fernández, P., & Ariño, M. (1996). Derivados exóticos [Documento de investigación 308. Centro Internacional de Investigación Financiera (CIIF) y División de Investigación IESE]. Universidad de Navarra.

Gao, R., Wu, W., & Liu, J. (2021). Asian rainbow option pricing formulas of uncertain stock model. *Soft Computing*, *25*(14), 8849-8873. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s00500-021-05922-y

Gavira-Durón, N., & Galindo, J. I. A. (2017). Métodos numéricos para cálculo de la prima de opciones asiáticas. *Estocástica: finanzas y riesgo*, *7*(1), 27-66. http://hdl.handle.net/11191/4945

Han, J., & Hong, Y. (2022). Review of Asian Options. *Open Access Library Journal*, *9*(2), 1-8. https://doi.org/10.4236/oalib.1108358

Huang, L., & Zhu, Q. (2020). A dynamic games approach to proactive defense strategies against advanced persistent threats in cyber-physical systems. *Computers & Security*, *89*, 101660.

Hull, J. C., & Basu, S. (2016). *Options, futures, and other derivatives.* Pearson Education India.

Kahale, N. (2020). General multilevel Monte Carlo methods for pricing discretely monitored Asian options. *European Journal of Operational Research*, *287*(2), 739-748. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.ejor.2020.04.022

Levy, E. (1992). Pricing European average rate currency options. *Journal of International Money and Finance*, *11*(5), 474-491.

Matías González, A., Martínez-Palacios, M. T. V., & Ortiz-Ramírez, A. (2019). Consumo e inversión óptimos y valuación de opciones asiáticas en un entorno estocástico con fundamentos microeconómicos y simulación Monte Carlo. *Revista mexicana de economía y finanzas*, *14*(3), 397-414. https://doi.org/https://doi.org/10.21919/remef.v14i3.408

Milevsky, M. A., & Posner, S. E. (1998). Asian options, the sum of lognormals, and the reciprocal gamma distribution. *Journal of financial and quantitative analysis*, *33*(3), 409-422. https://doi.org/https://doi.org/10.2307/2331102

Nielsen, J. A., & Sandmann, K. (2003). Pricing bounds on Asian options. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, *38*(2), 449-473. https://doi.org/https://doi.org/10.2307/4126759

Ortiz Ramírez, A., & Martínez Palacios, M. T. V. (2016). Valuación de opciones asiáticas versus opciones europeas con tasa de interés. *Contaduría y administración*, *61*(4), 629-648. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.cya.2016.06.002

Patie, P. (2013). Asian options under one-sided Lévy models. *Journal of Applied Probability*, *50*(2), 359-373. http://www.jstor.org/stable/43283468

Pesce, G., Pedroni, F., Chávez, E., de la Paz Moral, M., Rivero, M. A., & Milanesi, G. (2019). Opciones exóticas: ¿exóticas en la literatura? una revisión sistemática. http://repositoriodigital.uns.edu.ar/handle/123456789/4763

Raju, S. S. (2004). Pricing path dependent exotic options using monte carlo simulations. *Journal of Financial Education*, 76-89. http://www.jstor.org/stable/41948458

Rogers, L. C. G., & Shi, Z. (1995). The value of an Asian option. *Journal of Applied Probability*, *32*(4), 1077-1088. https://doi.org/https://doi.org/10.2307/3215221

Shokrollahi, F., Ahmadian, D., & Ballestra, L. (2024). Pricing Asian options under the mixed fractional Brownian motion with jumps. *Mathematics and Computers in Simulation*. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.matcom.2024.06.014

Turnbull, S. M., & Wakeman, L. M. (1991). A quick algorithm for pricing European average options. *Journal of financial and quantitative analysis*, *26*(3), 377-389. https://doi.org/https://doi.org/10.2307/2331213

Xu, L., Zhang, H., & Wang, F. L. (2023). Pricing of Arithmetic Average Asian Option by Combining Variance Reduction and Quasi-Monte Carlo Method. *Mathematics*, *11*(3), 594. https://doi.org/https://doi.org/10.3390/math11030594