eseconomía, vol. XV, núm. 54, primer semestre de 2021, pp. 95-100

Una pequeña contribución de la teoría racional del consumidor a la resolución de ecuaciones diferenciales de primer orden no homogéneas con condiciones inicial y final

Francisco Venegas-Martínez[*]

(*Recibido: marzo,* 2020/*Aceptado: julio,* 2020)

Resumen

Esta investigación con base en la teoría del consumidor racional da respuesta a la siguiente pregunta: ¿Qué condición debe satisfacer la función y_t para que la ecuación diferencial de primer orden no homogénea $\dot{x}_t = \alpha x_t + y_t$, con condiciones de frontera $x_0 > 0$ y $x_T = 0$, tenga una única solución? Para ello, se desarrolla un problema de un consumidor racional que maximiza utilidad total descontada (con su tasa de descuento subjetiva) sobre un bien de consumo no perecedero, en tiempo continuo y en un horizonte de planeación finito [0,T]sujeto a que el valor presente descontado (con la tasa de interés real) del consumo planeado sea igual a su riqueza inicial (positiva) y que no deja herencia.

Palabras clave: métodos matemáticos, ecuaciones diferenciales parciales, consumidor racional.
Clasificación JEL: C02, D11.

[*] Profesor-investigador en la Escuela Superior de Economía del Instituto Politécnico Nacional, México fvenegas1111@yahoo.com.mx.

A small contribution from the rational theory of consumer to solving differential equations first-order inhomogeneous with initial and final conditions

Abstract

This investigation based on the theory of the rational consumer answers the following question: What condition must function y_t satisfy for the inhomogeneous first-order differential equation $\dot{x}_t = \alpha x_t + y_t$ with boundary conditions $x_0 > 0$ y $x_T = 0$ to have a unique solution? To do this, a problem of a rational consumer that maximizes his total discounted utility (with his subjective discount rate) on a non-perishable consumer good, in continuous time in a finite planning horizon, subject to the discounted present value (with the real interest rate) of his planned consumption is equal to his initial (positive) wealth and does not leave inheritance.

Keywords: mathematical methods, partial differential equations, rational consumer.
JEL classification: C02, D11.

1. Introducción

Muchas has sido las contribuciones de la economía hacia la teoría de ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, en Sargent (1987), Turnovsky (1995) y Venegas-Martínez (2008) se encuentran varias de ellas. Esta trabajo con base en la teoría del consumidor racional proporciona la condición debe satisfacer una función y_t para que una ecuación diferencial de primer orden no homogénea de la forma $\dot{x}_t = \alpha x_t + y_t$, $\alpha > 0$, con condiciones de frontera $x_0 > 0$ y $x_T = 0$, tenga una única solución.

El desarrollo de este trabajo es como sigue: en la sección 2 se plantea el problema del consumidor racional asociado a la ecuación diferencial de primer orden no homogénea con dos condiciones de frontera que se ha mencionado anteriormente; en la sección 3 se establecen las condiciones para que se tenga una única solución; por último, en la sección 4 se dan las conclusiones.

2. Planteamiento del problema del consumidor racional

Considere un consumidor racional que maximiza en tiempo continuo utilidad logarítmica sobre un bien de consumo, c_t no perecedero. Es decir $u(c_t) = \ln(c_t)$. El problema de decisión de dicho consumir está dado por

$$\begin{aligned}&\text{Maximize} \quad \int_0^T \ln(c_t)e^{-\rho t}\mathrm{d}t\\&\text{subject to}\\&b_0 = \int_0^T c_t e^{-rt}\mathrm{d}t \ \text{ y } \ b_T = 0\end{aligned}$$

donde $\rho > 0$ es la tasa subjetiva de descuento, $r > 0$ es la tasa de interés real, $[0, T]$ es un horizonte de planeación finito, $b_0 > 0$ es el nivel de riqueza inicial y $b_T = 0$ es la condición de no herencia. Observe que el problema anterior es de cálculo de variaciones (problema isoperimétrico) En este caso el Lagrangeano satisface:

$$L = \ln(c_t)e^{-\rho t} - \lambda c_t e^{-rt}$$

Las condición de primer orden para una solución interior es, simplemente, $\partial L / \partial c_t = 0$. Es decir,

$$c_t = \frac{1}{\lambda}e^{(r-\rho)t} \tag{1}$$

Si se sustituye la ecuación anterior en la restricción, se obtiene

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\rho b_0}{1 - e^{-\rho T}} \tag{2}$$

Por lo tanto, la trayectoria óptima de consumo satisface

$$c_t = \frac{\rho b_0}{1 - e^{-\rho T}}e^{(r-\rho)t}$$

Si $\rho > r$, el consumo decrece, en caso contrario crece. La propensión marginal al consumo está dada por $\rho(1 - e^{-\rho T})^{-1}$.

3. Planteamiento del problema de control óptimo determinista

A continuación se plantea el problema equivalente de control óptimo

$$\begin{aligned}&\text{Maximize} \quad \int_0^T \ln(c_t)e^{-\rho t}\mathrm{d}t\\&\text{subject to}\\&\dot{b}_t = rb_t - c_t,\ b_0 > 0 \ \ y \ \ b_T = 0.\end{aligned}$$

En efecto, observe que si traemos a valor presente la expresión $\dot{b}_t = rb_t - c_t$, se tiene que

$$\int_0^T \dot{b}_t e^{-rt}\mathrm{d}t = \int_0^T rb_t e^{-rt}\mathrm{d}t - \int_0^T c_t e^{-rt}\mathrm{d}t$$

Integración por partes y la sustitución de las condiciones de frontera, $b_0 > 0 \ \ y \ \ b_T = 0$, conducirán, de nuevo, a la restricción el problema isoperimétrico

$$b_0 = \int_0^T c_t e^{-rt}\mathrm{d}t$$

En consecuencia, la trayectoria óptima de consumo es representada en la ecuación (1) y la restricción del problema de control óptimo se convierte en

$$\dot{b}_t = rb_t - \frac{\rho b_0}{1-e^{-\rho T}}e^{(r-\rho)t},\ b_0 > 0 \ \ y \ \ b_T = 0$$

Ahora se tiene una ecuación diferencial lineal de primer orden no homogénea con condición inicial y final, la cual tiene el formato $x_t = \alpha x_t + y_t$. Observe, primero, que la solución de este tipo de ecuaciones diferenciales con condición final $x_T = 0$ está dada por

$$x_t = e^{-\alpha(T-t)}\int_T^t y_s e^{\alpha(T-s)}\mathrm{d}s$$

Si $x_t = b_t$, $\alpha = r > 0$ y $y_t = c_t$, entonces

$$b_t = \frac{b_0 e^{-r(T-t)}e^{rT}}{1-e^{-\rho T}}\int_T^t \rho e^{-\rho s}\mathrm{d}s$$

Para resolver la integral $\int_T^t \rho e^{-\rho s}\mathrm{d}s$, se toma en cuenta que $\int_t^T = \int_0^T - \int_0^t$. Por lo tanto.

$$b_0 = \frac{b_0 e^{rt}}{1-e^{-\rho T}}[(1-e^{-\rho T})-(1-e^{-\rho t})]$$

Observe, primero, que ya se satisface que b_T=0 debido a que al final del periodo, T, el individuo consume toda su riqueza. Mientras que para el tiempo t = 0, la expresión (3) produce una identidad b_0 = b_0 Por lo tanto, una ecuación diferencial no homogénea de primer orden con condiciones de frontera de la forma $\dot{b}_t = \alpha x_t + y_t$, $x_0 > 0$ y $x_T = 0$ tiene una única solución si y sólo si

$$x_t = e^{-\alpha(T-t)}\int_T^t y_s e^{\alpha(T-s)}\mathrm{d}s \text{ y } y_t = \frac{\beta x_0}{1-e^{-\beta T}} e^{(\alpha-\beta)t}$$

donde $\beta > 0$ es un parámetro adicional asociado a la condición final .

4. Conclusiones

Este trabajo determina la condición que debe satisfacer una función y_t para que la ecuación diferencial de primer orden no homogénea $\dot{x}_t = \alpha x_t + y_t$ con condiciones de frontera $x_0 > 0$ y $x_T = 0$, tenga una única solución a través de un problema a través del problema que resuelve un consumidor racional que maximiza utilidad total descontada (con su tasa de descuento subjetiva) sobre un bien de consumo no perecedero, en tiempo continuo y en un horizonte de planeación finito, sujeto a que el valor presente descontado del consumo planeado sea igual a su riqueza inicial y que no deja herencia.

Referencias

Sargent T. J. (1987). *Macroeconomic* Theory. Academia Press. San Diego. California. USA.

Turnovsky, S. J. (1995). Methods of Macroeconomic Dynamics. MTI Press. USA.

Venegas-Martínez, F. (2008). Riesgos financieros y económicos: Productos derivados decisiones económicas bajo incertidumbre. Segunda edición. Editorial Cengage Learning. México.