

Modelos de saltos vs modelos de choques para la valuación de opciones en ambientes de alta volatilidad

Héctor Enrique Ortiz-Aguilar*
Francisco Venegas-Martínez**
Francisco Ortiz-Arango***

(Recibido: marzo 2019/Aceptado: agosto 2019)

Resumen

El presente trabajo realiza un análisis comparativo entre los modelos de saltos y choques tomando como referencia la solución básica de Black-Scholes-Merton (BSM) (1973). Los principales resultados son que, en un ambiente de alta volatilidad, el modelo BSM sobrevalúa excesivamente el precio de las opciones europeas de compra. Aunque el modelo de choques muestra una mejora en la valuación, el modelo de saltos proporciona primas más adecuadas. Es decir, el modelo de saltos es una mejor alternativa para la valuación de opciones un ambiente de alta volatilidad.

Palabras clave: mercados financieros Valuación de opciones, modelos matemáticos.

Clasificación JEL: D53, G13, C02.

* Profesor-investigador en el Instituto Politécnico Nacional, México. <kik3.live@gmail.com>.

** Profesor-investigador en el Instituto Politécnico Nacional, México. <fvenegas1111@yahoo.com.mx>.

*** Profesor-investigador en la Universidad Panamericana, México. <fortizar62@gmail.com>.

Jump models vs crash models for the valuation of options in environments high volatility

Abstract

This paper carries out a comparative analysis between the models of jumps and crashes taking as reference the basic solution from Black-Scholes-Merton (BSM) (1973). The main results are that, in an environment of high volatility, the BSM model excessively overvalues the price of European call options. Although the crash model shows an improvement in the valuation, the jump model provides more adequate premiums. That is to say, the jump model is a better alternative for option pricing in an environment of high volatility.

Keywords: financial markets, pricing options, mathematical models.

JEL classification: D53, G13, C02.

1. INTRODUCCIÓN

Desde hace varias décadas, la creación de nuevos instrumentos financieros ha generado cambios en los mercados financieros, en particular la creación de productos derivados ha conducido cambios profundos. El mundo de los productos derivados, o simplemente derivados, avanza y se transforma continuamente (Jara, 2017). El uso de los derivados para la cobertura de riesgos es una tarea continua de muchos agentes económicos (inversionistas, bancos, empresas, gobiernos, etc.). No obstante, algunas investigaciones sugieren que el uso excesivo de los derivados puede generar crisis, pues dichos derivados pueden contribuir a la aparición de burbujas especulativas (Vilariño-Sanz, 2010). Parece ser que el uso de estos productos derivados en los mercados mundiales, está más ligado a la especulación que a la cobertura, es decir, las partes involucradas en los acuerdos sobre opciones o derivados, rara vez llegan a concluir la entrega del bien o activo, en la gran mayoría de los casos las posiciones son cerradas antes de la fecha de

vencimiento, o bien si llegan a la fecha de liquidación, únicamente se pagan diferencias, buscando como único objetivo una remuneración basada en la especulación.

Las opciones son contratos que otorgan derechos a una de las contrapartes. Una opción europea de compra (venta) es un contrato que otorga al comprador el derecho mas no la obligación de comprar (vender) un activo subyacente a un precio predeterminado, en una fecha futura preestablecida, pagando por ello una prima (Venegas-Martínez y Cruz-Aké, 2010). Dichos contratos son negociables en los mercados sobre mostrador o en bolsas de derivados listados. En la actualidad, los dos mercados más grandes del mundo en derivados se encuentran en Chicago y Nueva York. En México, el 15 de diciembre de 1998, inicia operaciones el Mercado Mexicano de Derivados, MexDer (Castillo-Bárceñas, 2009). Es importante mencionar que fue a partir una crisis de 1995 que se creó dicho mercado (López-Herrera y Venegas-Martínez 2012) y esto constituye uno de los avances más significativos de desarrollo del sistema financiero mexicano (Mercado Mexicano de Derivados, 2017).

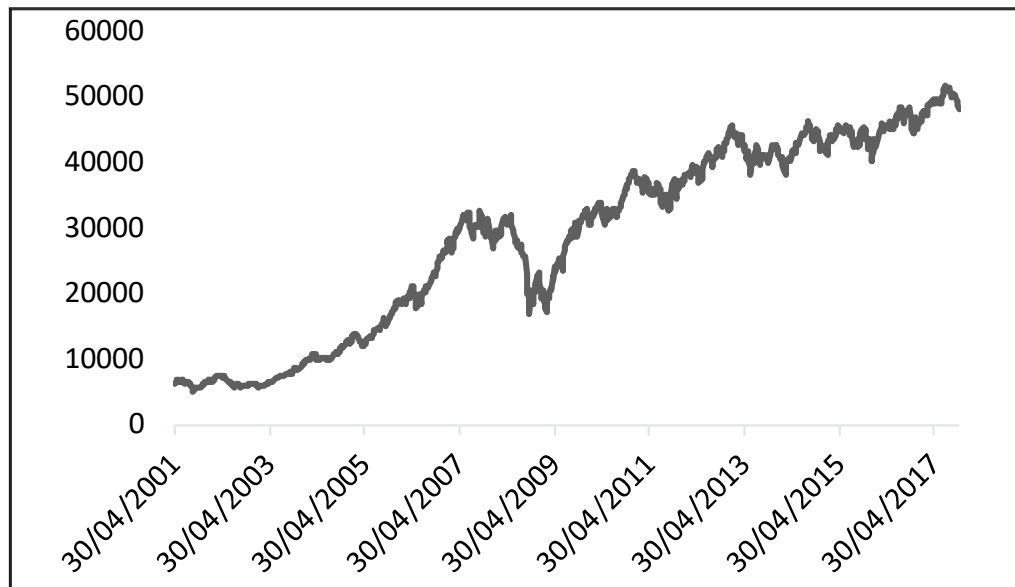
2. EL ÍNDICE DEL MERCADO BURSÁTIL MEXICANO, IPC

Contar con indicadores sobre el comportamiento de los mercados de capitales tomando en cuenta el pago de dividendos, la liquidez y la capitalización del mercado es una necesidad actual de los mercados bursátiles de todo el mundo (Cruz-Aké *et al.*, 2013 y Gómez-Ramos *et al.* 2011). Para el caso de México, el objetivo del índice de precios y cotizaciones (IPC) de la Bolsa Mexicana de Valores (BMV) es reflejar cambios en el valor de capitalización de las acciones en manos libres (flotantes).¹

El IPC comprende 35 emisoras seleccionadas bajo un conjunto de criterios (rotación, volumen de operaciones y valor de capitalización flotado). La dinámica del IPC a través de los años ha tenido un comportamiento con tendencia al alza, sin embargo, se puede notar en la gráfica 1 que en el periodo 2008-2009 tuvo una caída repentina, provocada por la crisis financiera internacional. Más tarde en 2010 logró regresar a los niveles antes alcanzados para continuar con una tendencia a la alza en los años posteriores y hasta la actualidad.

¹ Otra alternativa es utilizar un índice agregado de cotizaciones, el cual tiene la ventaja de representar a todo el conjunto de emisoras (Sanz-Carnero, 2003).

Gráfica 1
Niveles de cierre del IPC



Fuente: elaboración propia en base a datos históricos de Yahoo Finance (2017).

Justo en los auge o caídas repentinas del IPC se centrará esta investigación para comparar los resultados de dos modelos matemáticos utilizados como precios de referencia en presencia de este tipo de movimientos bruscos e inesperados que podrían ser saltos o choques. Es importante destacar que la mayoría de las predicciones sobre el comportamiento de los precios de los derivados fallaron durante 2008-2009; sin embargo, cuestionar las circunstancias o escenarios que nadie pudo prever no es algo ajeno en general a los mercados financieros, pues su esencia es comportarse de forma incierta (Vélez-Pareja y Machain, 2003).

3. MODELOS DE SALTOS Y MODELOS DE CHOQUES

Una breve descripción de los modelos de valuación de opciones con saltos y con choques se muestra a continuación.

3.1 *Valuación de opciones con procesos de difusión con saltos*

El modelo clásico de BSM es útil para valorar una opción europea cuando sólo se presentan movimientos pequeños que ocurren todos los días y para

ello se supone una distribución log-normal (procesos de difusión), pero pierde su idoneidad cuando ocurren saltos repentinos e inesperados (Venegas-Martínez, 2000 y 2007, Zambrano-Reyes y Venegas-Martínez, 2016, y Venegas-Martínez *et al.*, 2012). En esta investigación, como primer instancia, se utilizará un proceso de difusión con saltos, el cual permitirá valorar opciones bajo el supuesto de que los saltos ocurren de acuerdo a un proceso de Poisson, el cual, modela los movimientos bruscos que sufren los activos financieros y esto, a su vez, llevará al modelo de Merton (1976). Ahora bien, con base en Ortiz-Arango *et al.* (2012) se considera un proceso estocástico dM_t que satisface:

$$dM_t = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } \alpha dt + o(dt) \\ 0 & \text{con probabilidad } 1 - \alpha dt + o(dt) \end{cases}$$

en donde $o(dt)/dt \rightarrow 0$ cuando $dt \rightarrow 0$. Más precisamente:

$$\mathbb{P} \{ \text{un salto de tamaño 1 durante } dt \} = \mathbb{P} \{ dM_t = 1 \} = \alpha dt + o(dt) \text{ mientras que}$$

$$\mathbb{P} \{ \text{ningún salto durante } dt \} = \mathbb{P} \{ dM_t = 0 \} = 1 - \alpha dt + o(dt)$$

Por lo tanto, existe una probabilidad finita de que ocurra un salto en un tiempo finito. Se observa que $E[dM_t] = \alpha dt$ y $\text{Var}[dM_t] = \alpha dt$. El parámetro α es conocido como la intensidad del proceso de Poisson y define el número medio esperado de saltos por unidad de tiempo. Se tiene también que:

$$\begin{aligned} E \left[\int_0^t g(s) dM_s \right] &= \alpha \int_0^t g(s) ds \\ \text{y} \\ \text{Var} \left[\int_0^t g(s) dM_s \right] &= \alpha \int_0^t g^2(s) ds \end{aligned}$$

sea $\{B_t\}_{t \geq 0}$ un movimiento browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad. El proceso de Poisson, M_t , puede ser incorporado a la ecuación de difusión de una variable subyacente, S_t , de la siguiente forma:

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dB_t + \beta S_t dM_t \quad (1)$$

en donde las constantes μ , σ y β representan, respectivamente, la tendencia, la volatilidad instantánea y el tamaño medio del salto. Se supone que los

procesos dB_t y dM_t no están correlacionados entre sí. Si hay un salto, es decir, si $dM_t = 1$, entonces S_t inmediatamente toma el valor $S_t(1+\beta)$, con lo que se puede modelar un incremento brusco en el rendimiento de tamaño β . Una dinámica de este tipo con movimientos bruscos se apega más a la realidad que el modelo clásico de BSM, el cual es útil únicamente cuando se presentan pequeños movimientos (Castillo-Bárceñas, 2009). Una vez definido un proceso de difusión con saltos, falta establecer cómo se calcula la diferencial estocástica de una función arbitraria que depende del precio del activo subyacente y del tiempo. Con base en Venegas-Martínez (2006), dada la ecuación diferencial estocástica lineal homogénea en (1) y si $h = h(S_t, t)$ es una función de clase C^2 , entonces la diferencial estocástica de $h(S_t, t)$ satisface.

$$dh = \left(\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial S_t} \mu_t S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial S_t^2} \sigma_t^2 S_t^2 \right) dt + \frac{\partial h}{\partial S_t} \sigma_t S_t dB_t + [h(S_t(1 + \beta), t) - h(S_t, t)] dM_t$$

Y en particular el rendimiento logarítmico, $\ln(S_t)$, tiene la siguiente diferencial estocástica

$$d \ln(S_t) = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dB_t + \ln(1 + \beta) dM_t$$

Equivalentemente

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma \int_0^t dB_t + \ln(1 + \beta) \int_0^t dM_t \right\} \quad (2)$$

Merton (1976) analiza un escenario de saltos y destaca que si se presenta un salto, la cobertura Δ dejará de ser efectiva; véase también Ortiz-Arango *et al.* (2012). Merton (1976) también determina una ecuación de tipo integro-diferencial:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_t^2 S_t^2 \frac{\partial^2 h}{\partial S_t^2} + r S_t \frac{\partial h}{\partial S_t} - r c \\ & + \alpha E_\beta [h(S_t(1 + \beta), t)] - \alpha h(S_t, t) - \alpha \frac{\partial h}{\partial S_t} S_t E_\beta [\beta] = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

donde r es una tasa de interés continuamente capitalizable y constante. Se observa que, si no hay un salto, es decir, al deshacerse de las variables α y β , que

son respectivamente, el número de saltos esperado y el tamaño de dichos saltos, entonces (3) se reduce a la ecuación diferencial parcial de BSM.²

Asimismo, Merton (1976) define una sucesión de variables aleatorias Z_n aunado a condiciones de frontera $h(0, t) = 0$ y $h(S_t, T) = \max(S_t - P, 0)$, donde P es el precio de ejercicio de la opción, lo cual produce una solución de la forma:

$$h(S_t, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\alpha(T-t)} [\alpha(T-t)]^n}{n!} E_{Z_n} [h_{bs}] \quad (4)$$

con $Z_0 = 1$, $Z_n = \prod_{k=1}^n (\beta_k + 1)$ donde β_k una sucesión de variables aleatorias idénticamente distribuidas y h_{bs} es la solución básica de BSM (Venegas-Martínez, 2001). Al calcular la esperanza $E_{Z_n} [h_{bs}]$ se proporciona un valor medio para $h(S_t, t)$, pero si se toma un n suficientemente grande, las soluciones aproximadas se calculan de forma sencilla y para el caso en que los tamaños de saltos tengan una distribución log-normal con media $E[\beta]$ y desviación estándar σ' , entonces Z_n también tendrá distribución log-normal con desviación estándar $n\sigma'$ y media $E[Z_n] = e^{n \log(1+E[\beta])}$, entonces la valuación final de la opción a partir de (4) es:

$$h_t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\alpha'(T-t)} [\alpha'(T-t)]^n}{n!} h_{bs} \quad (5)$$

3.2. Valuación de opciones con choques

A continuación, se presenta una fórmula explícita con base en la teoría de choques para modelar el comportamiento del precio de un activo, esto con el fin de comparar los resultados del enfoque de choques con los resultados obtenidos en la teoría de saltos. Desde que Merton (1976) publicó sus resultados sobre portafolios en tiempo continuo con saltos de Poisson en los precios de los activos, se han propuesto diferentes alternativas y en este apartado nos centramos en la propuesta de Iliski (1999), Korn y Wilmott (2002), Korn (2007), Korn and Seifried, (2009), Saboyá-Cortes *et al.* (2011), Korn y Menkens (2005), y Menkens (2004), los cuales se enfocan en choques modelados como eventos bruscos e inciertos.

² Otros enfoques que abandonan el supuesto de normalidad se pueden encontrar en Ortiz-Ramírez (2012).

Para describir un escenario con choques, se toman las siguientes definiciones de Engler y Korn (2014). Al igual que en la teoría de saltos P_t será el precio del activo con riesgo, el cual cumple

$$dP_t = P_t [\mu + r_t]dt + P_t \sigma_1 dw_t, \quad t \in [0, \tau) \cup (\tau, T]$$

$$P_\tau = (1 - l)P_t$$

donde el precio inicial satisface $P_0 > 0$, μ es un parámetro de tendencia, σ_1 es la constante de volatilidad, r_t es la tasa de interés estocástica, τ es el tiempo donde se genera el choque y l el tamaño del choque tal que $0 < l \leq 1$. Así mismo, se supone que r_t sigue un proceso con reversión a la media para $t \in [0, T]$:

$$dr_t = a(r_M - r_t)dt + \sigma_2 dw_t$$

$$dw_t := \rho dw_t + \sqrt{1 - \rho^2} dw_t$$

aquí $a > 0$ representa la velocidad con que el valor de la tasa de interés regresa a r_M en el largo plazo y ρ es el coeficiente de correlación entre P_t y r_t . Más aún, se supone que la tasa de interés estocástica r_t no será afectada por los choques. Si $B_t(r_t, t)$, entonces:

$$\frac{\partial B_t}{\partial t} + \gamma \sup_{h_t} \left[\mu h_t B - \frac{\sigma_1^2}{2} (1 - \gamma) h_t^2 B + \rho \sigma_1 \sigma_2 h_t B_r \right] + \gamma r B + a(r_M - r_t) B_t + \frac{\sigma_2^2}{2} B_{rr} = 0$$

cuya solución dará el valor óptimo del activo financiero en el instante después del choque. La función h_t satisface

$$h_t = \left[\frac{\mu}{(1 - \gamma)\sigma_1^2} + \frac{\rho \sigma_2}{(1 - \gamma)\sigma_1} \right] h_{bs} \quad (6)$$

la cual será de utilidad para el desarrollo de esta investigación. En la ecuación (6), h_{bs} es la solución básica de BSM.

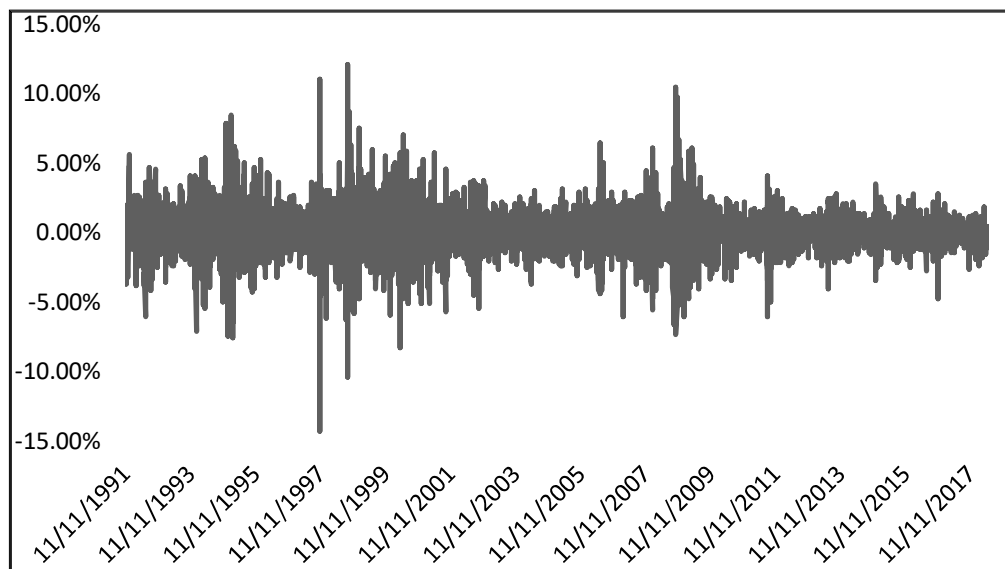
4. Análisis del comportamiento del IPC

En esta sección se presentan los resultados obtenidos mediante el modelo de saltos y el modelo de choques para la valuación de una opción sobre el IPC, utilizando datos de 2007 a 2009, para comparar su desempeño en un ambiente de alta volatilidad.

4.1. Análisis dinámico de los rendimientos logarítmicos del IPC

Evidentemente, no todos los rendimientos de activos se comportan de acuerdo con un movimiento geométrico browniano; más bien sería raro que el rendimiento de un activo se comporte así y sobre todo en ambientes de alta volatilidad. Se tiene ahora la tarea de realizar un análisis del comportamiento del índice IPC de la BMV. En la gráfica 2 se muestran los rendimientos logarítmicos sobre los niveles de cierre diarios del IPC que van del 8 de octubre de 1991 al 9 de mayo de 2018. Se observan varios agrupamientos de volatilidad.

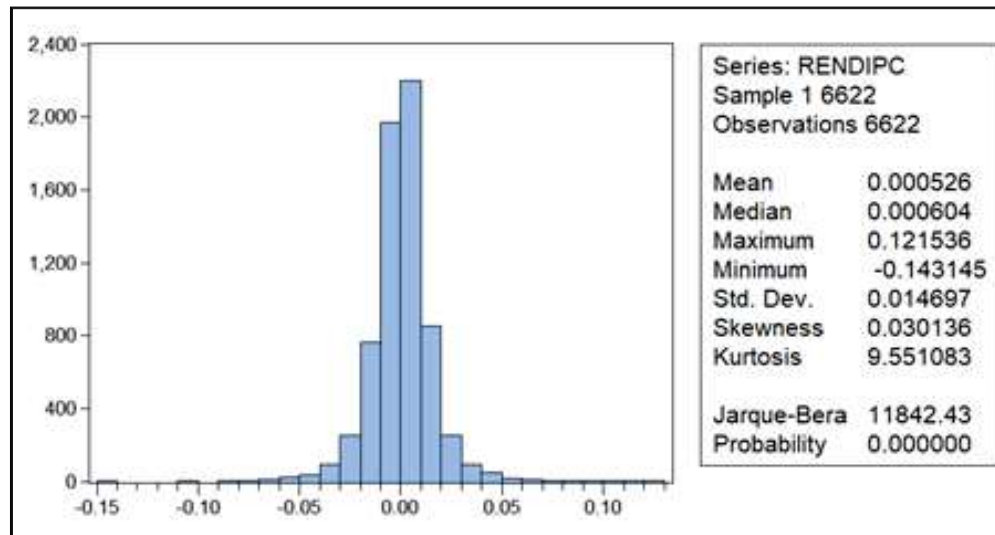
Gráfica 2
Rendimientos logarítmicos históricos diarios del IPC
(8 de octubre de 1991 al 9 de mayo del 2018)



Fuente: elaboración propia con datos históricos de Yahoo Finance.

A continuación, en la gráfica 3 se muestra el histograma y las medidas de tendencia central relacionados a los mismos rendimientos logarítmicos.

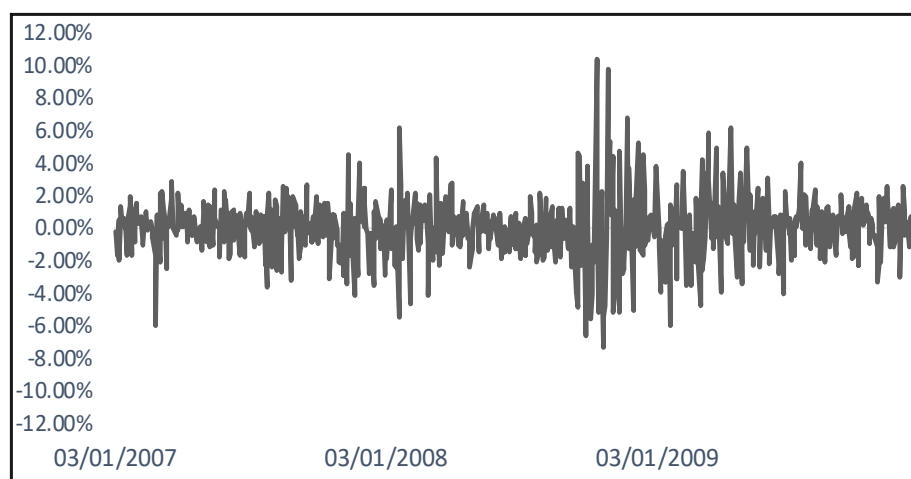
Gráfica 3
Distribución empírica normalizada del rendimiento logarítmico del IPC
(8 de octubre de 1991 al 9 de mayo del 2018)



Fuente: elaboración propia con datos históricos de Yahoo Finance.

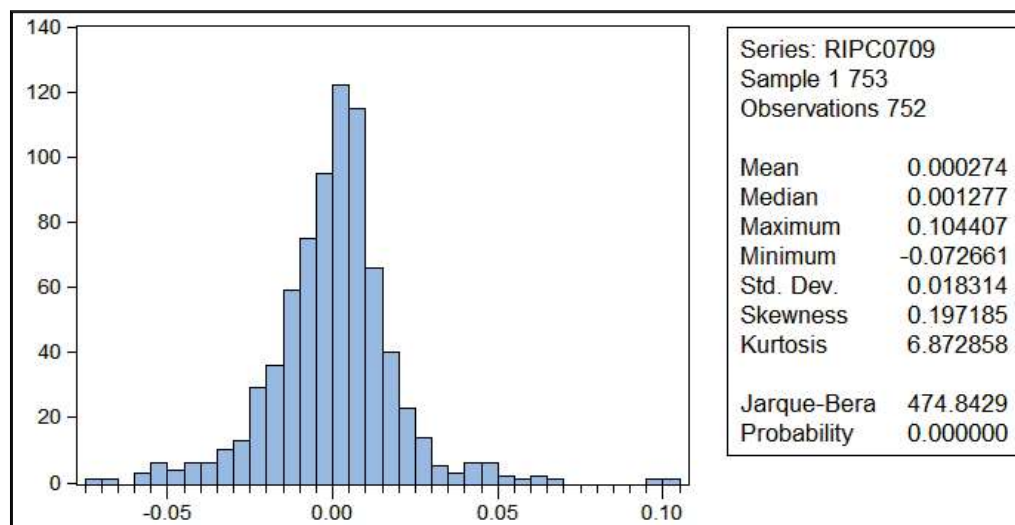
A continuación se realiza el mismo análisis pero sobre un periodo diferente para verificar que se cumplen esencialmente las mismas características. Para el periodo 2 de enero de 2007 al 31 de diciembre de 2009, los rendimientos logarítmicos y el histograma de rendimientos del IPC se muestran en las gráficas 4 y 5, respectivamente.

Gráfica 4
Rendimientos logarítmicos históricos diarios del IPC
(2 de enero de 2007 al 31 de diciembre de 2009)



Fuente: elaboración propia con datos obtenidos de Yahoo Finance (2/01/2007 al 31/12/2009).

Gráfica 5
Distribución empírica normalizada del rendimiento logarítmico del IPC
(2 de enero de 2007 al 31 de diciembre de 2009)



Fuente: elaboración propia con datos obtenidos de Yahoo Finance (2 de enero de 2007 al 31 de diciembre de 2009).

Dados los resultados de las gráficas anteriores se tiene un nivel de curtosis de 9.551% y un nivel de 6.87% en ambos periodos de análisis, respectivamente; la distribución normal estándar tiene una curtosis de 3.0%. Por otro lado, en la prueba de Jarque-Bera la probabilidad debería ser mayor a 0.05% para una distribución normal pero la prueba en ambos casos no se cumple. Con base en estos resultados se puede concluir que los rendimientos del IPC no se comportan de acuerdo con una distribución normal en el periodo 2007-2009. En particular, en ambos casos se observa una cresta muy alta. También es importante notar que las colas de las distribuciones empíricas son más pesadas que las de la normal estándar y debido a esto se tiene una mayor probabilidad de que valores extremos ocurran. En este caso, si la distribución normal se mezcla con una distribución que genere valores extremos (saltos o choques) en el rendimiento del subyacente, se producirán colas más pesadas y se obtendrá una aproximación más realista del comportamiento del precio del activo, abandonando el mundo normal.

Tanto el modelo de saltos como el modelo de choques están relacionados con el modelo de BSM, por lo que el primer paso para efectuar un análisis comparativo, es definir y estimar los parámetros que cada modelo necesita. Los parámetros que utiliza el modelo de BSM son las siguientes:

S_t : Precio actual del activo subyacente

K : Precio de ejercicio de la opción

σ : Varianza anual del rendimiento del activo subyacente

r : Tasa de interés libre de riesgo

$T-t$: Tiempo de vencimiento como proporción de año

Por otro lado, para la valuación de una opción bajo con saltos en precio del activo subyacente se debe contar con lo siguiente:

α : Número de saltos por unidad de tiempo

ε : Tasa esperada de rendimiento instantánea del activo

δ^2 : Varianza del tamaño del salto

σ^2 : Varianza del proceso de difusión en ausencia de saltos

En la segunda opción, en el modelo de choques, además de las variables mencionadas en los modelos BSM y saltos, se deben estimar dos más:

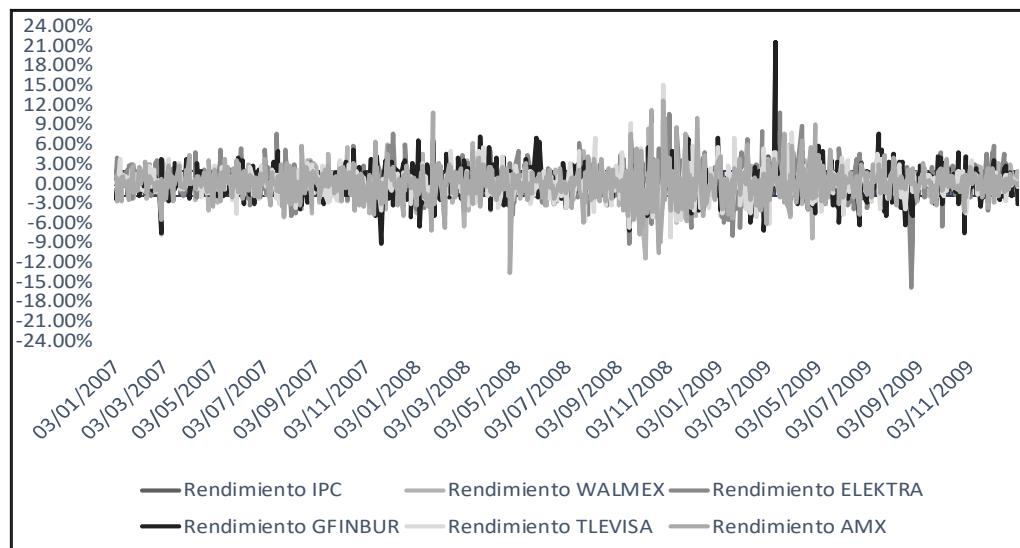
μ : Constante de tendencia de retorno

γ : Constante de aversión al riesgo

4.2. Análisis de la existencia de saltos o choques en el IPC

Antes de valuar opciones con cualquiera de las alternativas, se necesita realizar un análisis de la existencia de saltos o choques en el IPC y de hallarse, examinar si son específicos de un activo o provienen de varias emisoras. Todos los datos provienen de *Google Finance*. Se toman como muestra a las cinco emisoras de mayor peso del IPC en 2008. En la gráfica 6 se puede ver el comportamiento del IPC y de las emisoras de mayor peso AMX, ELEKTRA, GFINBUR, TLEVISA y WALMEX, de mayor peso.

Gráfica 6
Comparación de los rendimientos logarítmicos diarios del IPC, AMX,
ELECTRA, GFINBUR, TLEVISA Y WALMEX (2007-2009)



Fuente: elaboración propia con datos obtenidos de Investing.com. (2 de enero de 2007 al 31 de diciembre de 2009).

La gráfica 6 tiene barras de 3 desviaciones estándar, con lo cual se pueden ver rendimientos que van más allá de esta banda, es decir, posibles saltos o choques. A su vez se aprecia una frecuencia alta de dichos saltos o choques. Para la estimación de los parámetros de saltos o choques por unidad de tiempo se deben eliminar los movimientos sistemáticos que se presentan en el IPC. Para ello se genera una serie de diferencia de rendimientos logarítmicos entre los niveles de cierre del IPC y la emisora AMX (la cual tiene el mayor peso dentro del IPC en el periodo de estudio) y, posteriormente, se estimaron el número de saltos o choques obtenidos fuera de una banda de tres de desviaciones estándar. En este caso, las observaciones anormales podrían ser saltos o choques, en el cuadro 1 se presentan los resultados obtenidos de dicho análisis.

Cuadro 1
Cálculo del parámetro de saltos o choques α

Bandas	Número de saltos o choques	Valor aproximado de α
Media $\pm$ Desv. estándar	161	0.214380826
Media $\pm$ 0.01	262	0.348868176
Media $\pm$ 0.005	459	0.611185087
	promedio	0.391478029

Fuente: elaboración propia.

El valor aproximado de α se calculó como el número promedio de saltos o choques observado por año, así pues, dados los resultados se toma un $\alpha = 0.4$ para el análisis de esta investigación.

4.2. Análisis del valor una opción europea de compra del IPC

Con el propósito de que la presente investigación se apegue a las reglas del MexDer, se siguen las fechas de negociación y vencimiento estipuladas por el MexDer. Todos los días son hábiles excepto sábados, domingos y aquellos que establezca la Comisión Nacional Bancaria y de Valores (CNBV) como inhábiles bancarios (Mercado Mexicano de Derivados, 2018). Para todos los contratos, el último día de negociación es el mismo día de vencimiento (Mercado Mexicano de Derivados, 2018).

En el cuadro 2 se presentan los resultados obtenidos para el cálculo de la prima opción europea de compra sobre el IPC, se divide en 3 periodos cuatrimestrales del 2007 a 2009 en donde la valuación se efectúa en el primer día hábil de cada cuatrimestre.

Cuadro 2
Resultados del modelo BSM para el primer día de cada cuatrimestre

Fecha de negociación	S_t	K	σ	r	t	BSM
martes, 2 /01/2007	26 664.4492	22900	15.3867%	7.0337%	0.3347	4255.5796
miércoles, 2/05/2007	29 259.9199	27500	19.3981%	7.1935%	0.3347	2744.9265
lunes, 3/09/2007	30 797.5996	30800	21.7495%	7.3087%	0.3466	1828.1445
miércoles, 2/01/2008	28 699.1191	30400	24.0170%	7.4294%	0.3135	1050.5094
viernes, 2/05/2008	30 551.4707	29350	28.6828%	7.6918%	0.3333	2944.1224
lunes, 1/09/2008	26 424.6992	29500	16.5367%	7.8672%	0.3452	234.4609
viernes, 2/01/2009	23 250.9609	22300	53.8145%	7.1524%	0.3147	3345.3966
lunes, 4/05/2009	23 014.0508	20050	37.3206%	4.9489%	0.3546	3886.2966
martes, 1/09/2009	27 749.1602	24900	23.7307%	4.4994%	0.3267	3507.2384

Fuente: elaboración propia.

A continuación, se presentan en el cuadro 3 los resultados obtenidos igualmente con BSM pero para el último día de negociación.

Cuadro 3
Resultados del modelo BSM para el último día de negociación de cada cuatrimestre

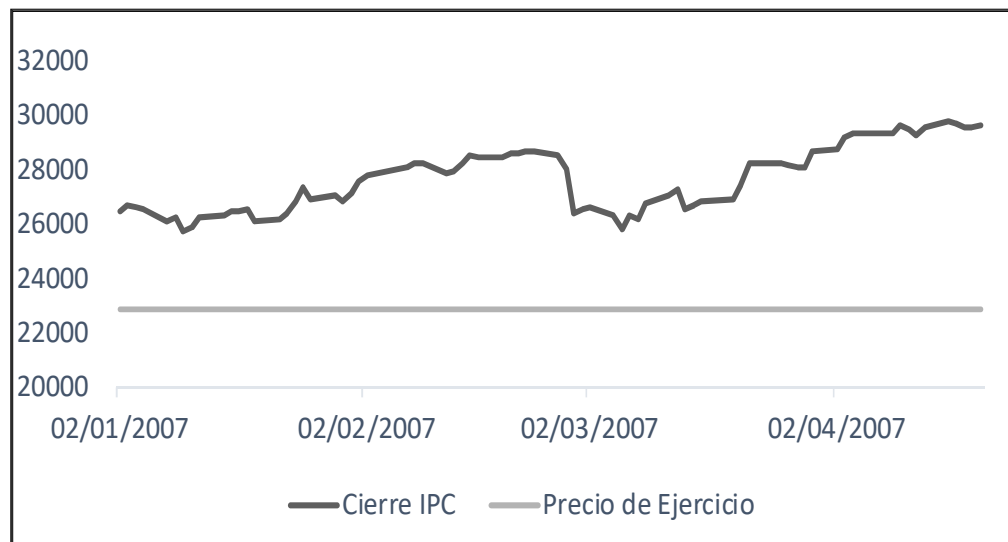
Fecha de negociación	S_t	K	σ	r	t	BSM
viernes, 20/04/ 2007	29 832.4800	22900	17.7373%	7.0337%	0.3347	6938.8963
viernes, 17/08/ 2007	28 510.6600	27500	20.2713%	7.1935%	0.3347	1018.7759
viernes, 21/12/ 2007	29 638.4000	30800	24.6258%	7.3087%	0.3466	0.558059
viernes, 18/04/ 2008	31 795.6800	30400	26.6519%	7.4294%	0.3135	1405.2105
viernes, 15/08/ 2008	27 340.8300	29350	23.6210%	7.6918%	0.3333	0.0001
viernes, 19/12/ 2008	22 221.6400	29500	40.2129%	7.8672%	0.3452	0.0000
viernes, 17/04/ 2009	22 234.8400	22300	46.5021%	7.1524%	0.3147	232.3497
viernes, 21/08/ 2009	28 308.9600	20050	24.1156%	4.9489%	0.3546	8262.9128
viernes, 18/12/ 2009	31 834.0700	24900	18.9901%	4.4994%	0.3267	6938.5331

Fuente: elaboración propia.

Los resultados obtenidos para el primer día de cada cuatrimestre y el último día de negociación son explicados a través de las gráficas 7-15. Asimismo se destaca que el precio de ejercicio fue calculado como el promedio de los niveles de cierre del IPC en un cuatrimestre anterior al que se calcula el valor de la opción de compra.

Se observa, en la gráfica 7, que en este primer periodo (cuatrimestre) el precio de ejercicio se mantuvo en todo momento por debajo del nivel de cierre del IPC, lo cual explica los altos valores intrínsecos de la opción de compra obtenidos.

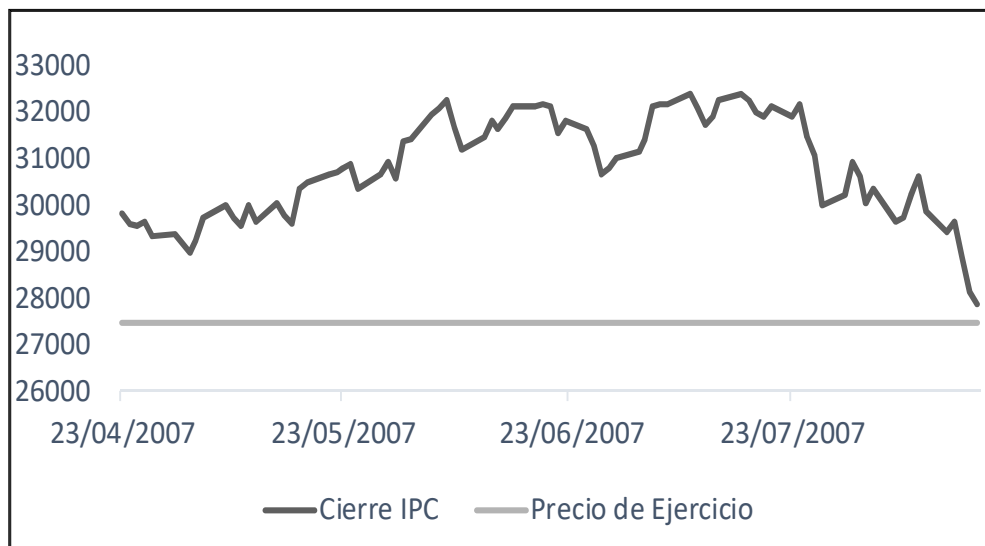
Gráfica 7
Primer cuatrimestre 2007



Fuente: elaboración propia.

En el caso del segundo periodo, de igual forma, el nivel de cierre del IPC se mantuvo en todo momento por arriba del precio de ejercicio, lo cual se muestra en la gráfica 8. Sin embargo, al final del periodo se observa una baja considerable en el activo subyacente y con eso una explicación al decremento en el valor intrínseco de la opción de compra.

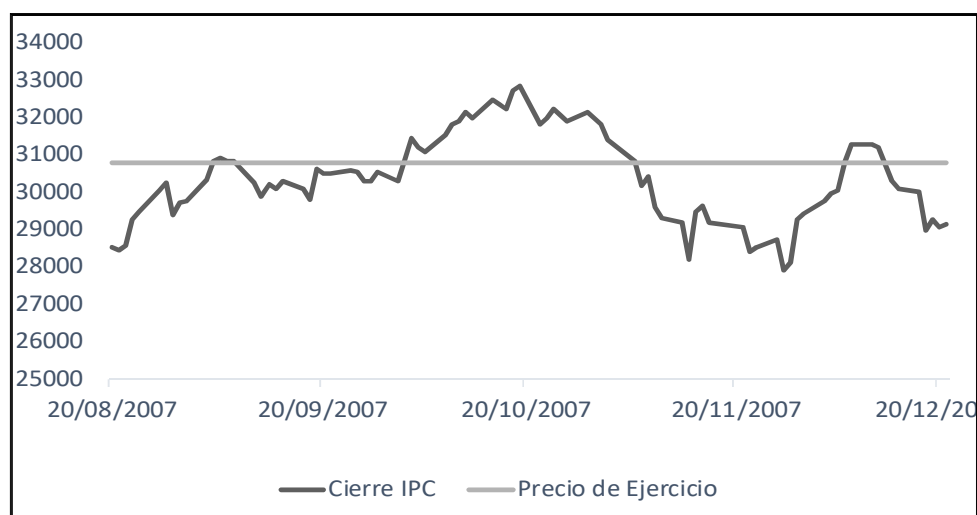
Gráfica 8
Segundo cuatrimestre 2007



Fuente: elaboración propia.

Como se puede ver, en la gráfica 9, para el tercer periodo de 2007 el precio de ejercicio está mucho más cerca del nivel de cierre del IPC, lo cual explica el valor intrínseco de la opción de compra al inicio del mes de septiembre. Al final del periodo se observa un nivel de cierre del subyacente inferior al precio de ejercicio, lo cual explica una prima baja en la fecha de vencimiento de la opción de compra.

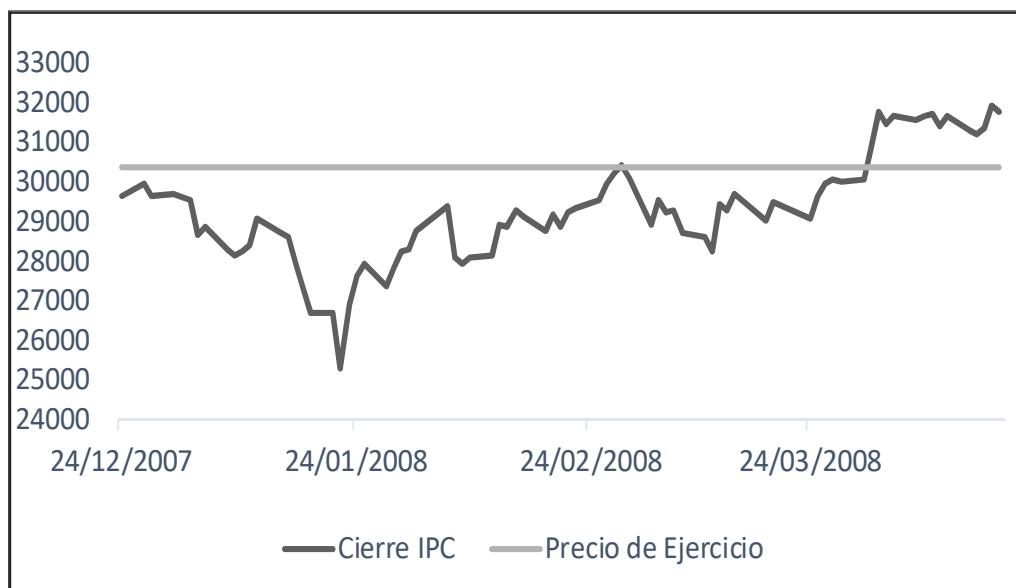
Gráfica 9
Tercer cuatrimestre 2007



Fuente: elaboración propia.

Para el primer periodo de 2008 se puede apreciar, en la gráfica 10, que la mayor parte del tiempo el nivel de cierre del IPC se mantuvo por debajo del precio de ejercicio, aunque, al final el mercado respondió de forma favorable con un aumento en el valor intrínseco de la opción de compra en la fecha de vencimiento.

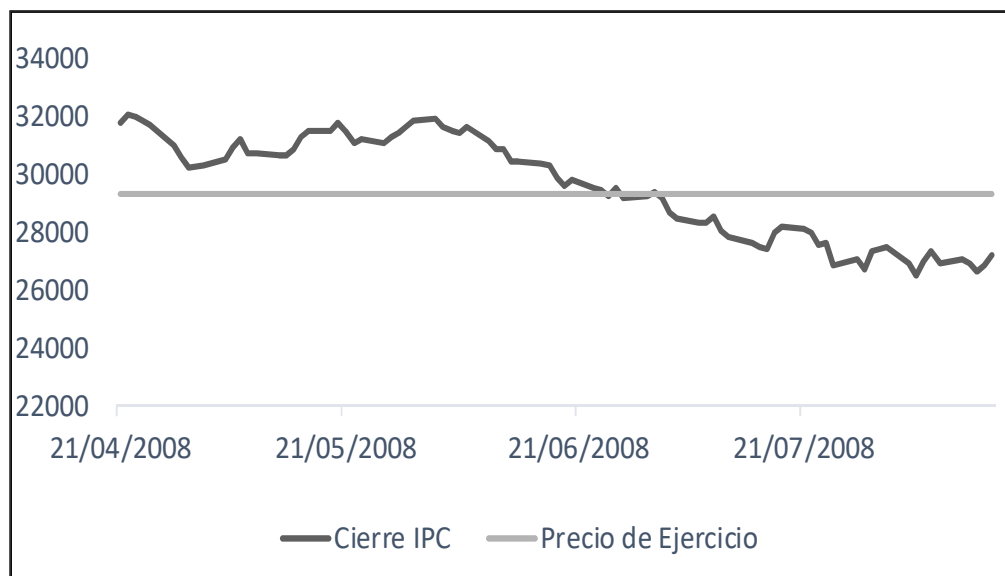
Gráfica 10
Primer cuatrimestre 2008



Fuente: elaboración propia.

En la gráfica 11 se observa para el periodo en cuestión que es justo cuando el mercado mexicano bursátil empieza a caer, tal vez por el comienzo de la crisis, y se puede distinguir un movimiento descendente del nivel de cierre del IPC, comenzando por encima del precio de ejercicio y terminando por debajo del mismo, teniendo un valor intrínseco prácticamente cero para el último día de negociación.

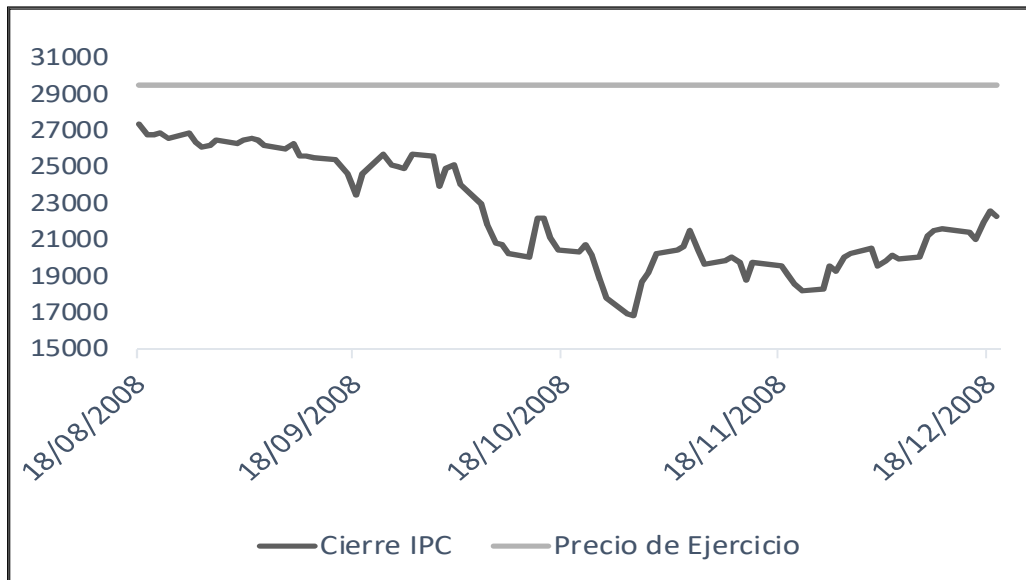
Gráfica 11
Segundo cuatrimestre 2008



Fuente: elaboración propia.

El tercer cuatrimestre del 2008, mostrado en la gráfica 12, es sin duda el periodo más álgido de la crisis, y se da un fenómeno contrario al del primer periodo de 2007, pues aquí el precio de ejercicio está en todo momento por arriba del nivel de cierre del IPC, lo cual conduce a precios de una opción de compra más bajos tanto al inicio de cuatrimestre como en la fecha de vencimiento, teniendo en esta última un valor cercano a cero.

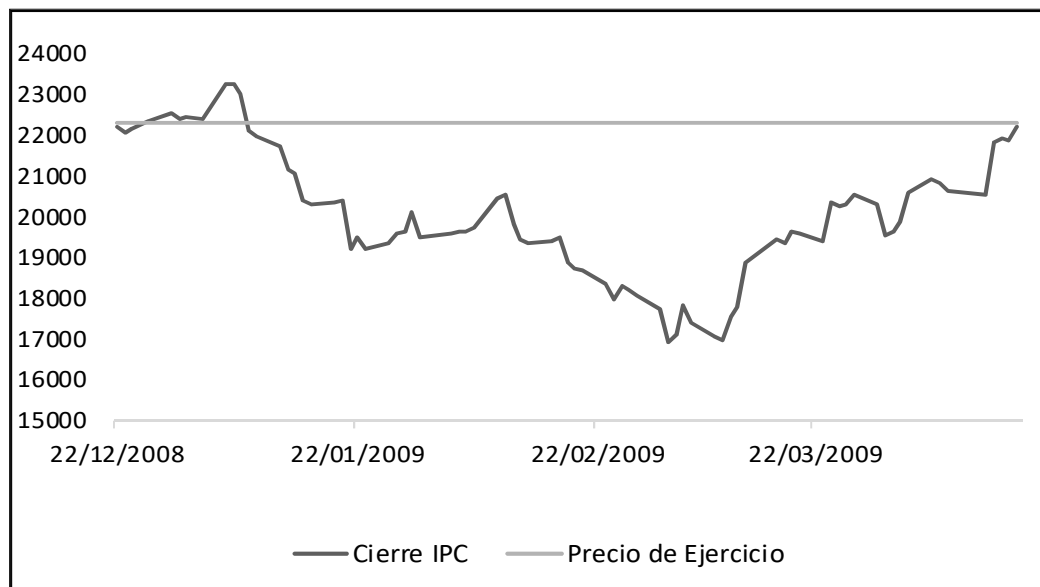
Gráfica 12
Tercer cuatrimestre 2008



Fuente: elaboración propia.

Sobre el primer cuatrimestre del 2009, de acuerdo con la gráfica 13, se observa que todavía el efecto de la crisis mundial ya que, la mayor parte del tiempo, el precio de ejercicio se encuentra por arriba del nivel cierre del IPC. Sin embargo, al final del periodo el mercado empieza a recuperarse teniendo un precio bajo para la opción de compra, cercano a cero como se había visto al final de los últimos dos periodos.

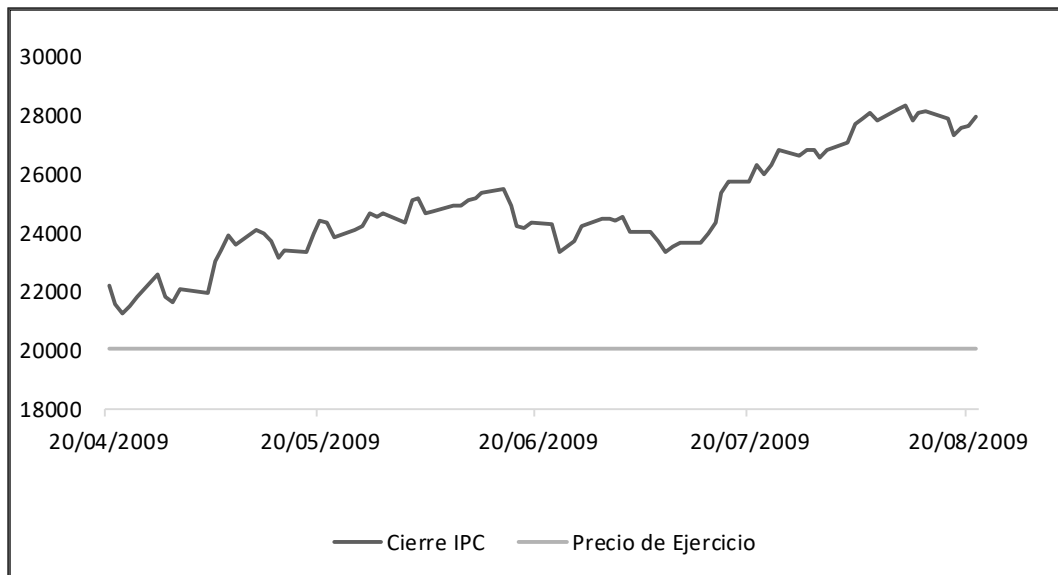
Gráfica 13
Primer cuatrimestre 2009



Fuente: elaboración propia.

En la gráfica 14 se puede observar que a partir de mayo del 2009 el mercado empieza a recuperarse, dejando una vez más al precio de ejercicio por debajo del nivel de cierre del IPC en todo momento, lo cual lleva a tener nuevamente valores intrínsecos positivos muy por arriba de los vistos en los periodos de crisis. En particular se nota un movimiento al alza del nivel de cierre del IPC, lo que explica el incremento de la valuación de la opción de compra al final del periodo.

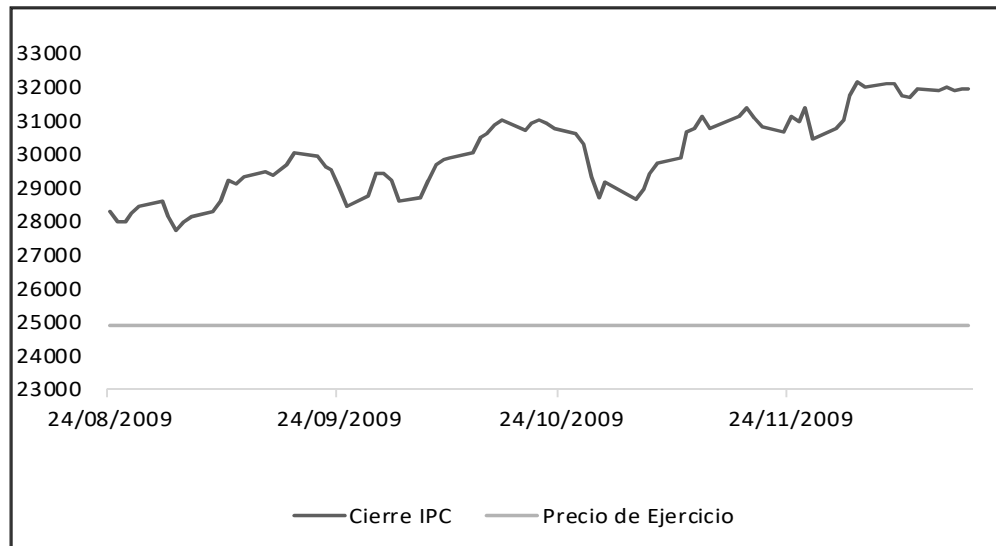
Gráfica 14
Segundo cuatrimestre 2009



Fuente: elaboración propia.

Para el último periodo de estudio, presentado en la gráfica 15, se observa claramente la recuperación del mercado. Ya desde el periodo anterior su movimiento es ascendente, dejando de nuevo al precio de ejercicio por debajo de los niveles de cierre del IPC. En este periodo, se presentan altos precios en el modelo de BSM.

Gráfica 15
Tercer cuatrimestre 2009



Fuente: elaboración propia.

Una vez realizado el análisis de los valores intrínsecos de la opción a través de las gráficas anteriores, se puede verificar que conforme el nivel de cierre del IPC se separa del precio de ejercicio pactado (ya sea por arriba o por abajo) el valor intrínseco de la opción de compra sufre cambios drásticos, como en el segundo cuatrimestre de 2008. Al inicio de mayo el valor intrínseco de la opción de compra era alto mientras que en el último día de negociación, es decir, el viernes 15 de agosto su valor fue de casi cero.

5. APLICACIÓN DE LOS MODELOS DE SALTOS Y CHOQUES PARA LA VALUACIÓN DE OPCIONES DEL IPC

A continuación se procede a estimar los parámetros de los modelos de saltos y de choques. Para ello se utilizan las siguientes expresiones:

$$\alpha' = \alpha(1 + E[v])$$

$$\sigma_n^2 = \sigma^2 + \frac{n\delta^2}{T-t}$$

$$r_n = r - \lambda E[v] + \frac{n \ln(1 + E[v])}{T-t}$$

Estos parámetros servirán para modelar el proceso de saltos. Por otro lado, para el modelo de choques se tomará un parámetro de aversión al riesgo $\gamma = 0.5$. Una vez establecido esto, se muestran en los cuadros 4 y 5 los resultados obtenidos para ambos modelos en el primer día de cada cuatrimestre.

Cuadro 4
Resultados del modelo de saltos para el primer día de cada cuatrimestre

Fecha de negociación	S_t	K	σ	r	t	saltos
martes, 2 de enero de 2007	26 664.4492	22900	15.3867%	7.0337%	0.3347	1056.5698
miércoles, 2 de mayo de 2007	29 259.9199	27500	19.3981%	7.1935%	0.3347	752.1927
lunes, 3 de septiembre de 2007	30 797.5996	30800	21.7495%	7.3087%	0.3466	791.8061
miércoles, 2 de enero de 2008	28 699.1191	30400	24.0170%	7.4294%	0.3135	201.8564
viernes, 2 de mayo de 2008	30 551.4707	29350	28.6828%	7.6918%	0.3333	1267.2369
lunes, 1 de septiembre de 2008	26 424.6992	29500	16.5367%	7.8672%	0.3452	13.1386
viernes, 2 de enero de 2009	23 250.9609	22300	53.8145%	7.1524%	0.3147	1405.2624
lunes, 4 de mayo de 2009	23 014.0508	20050	37.3206%	4.9489%	0.3546	1020.1683
martes, 1 de septiembre de 2009	27 749.1602	24900	23.7307%	4.4994%	0.3267	845.0025

Fuente: elaboración propia.

Cuadro 5
Resultados del modelo de choques para el primer día de cada cuatrimestre

Fecha de negociación	S_t	K	σ	r	t	choques
martes, 2 de enero de 2007	26 664.4492	22900	15.3867%	7.0337%	0.3347	2228.0739
miércoles, 2 de mayo de 2007	29 259.9199	27500	19.3981%	7.1935%	0.3347	1612.3624
lunes, 3 de septiembre de 2007	30 797.5996	30800	21.7495%	7.3087%	0.3466	1069.6654
miércoles, 2 de enero de 2008	28 699.1191	30400	24.0170%	7.4294%	0.3135	613.4474
viernes, 2 de mayo de 2008	30 551.4707	29350	28.6828%	7.6918%	0.3333	2352.0524
lunes, 1 de septiembre de 2008	26 424.6992	29500	16.5367%	7.8672%	0.3452	159.7254
viernes, 2 de enero de 2009	23 250.9609	22300	53.8145%	7.1524%	0.3147	3008.9982
lunes, 4 de mayo de 2009	23 014.0508	20050	37.3206%	4.9489%	0.3546	3131.7898
martes, 1 de septiembre de 2009	27 749.1602	24900	23.7307%	4.4994%	0.3267	2258.3953

Fuente: elaboración propia.

El primer punto del análisis anterior para resaltar es la reducción en los valores obtenidos en ambos modelos (comparado con los resultados de BSM). Al mismo tiempo se puede notar que los valores en el modelo de saltos son todavía menores, que los obtenidos con el modelo de choques. Se puede concluir entonces que los valores obtenidos por la modelación de BSM corresponderían a una sobrevaloración en las opciones de compra del IPC. Asimismo, en los cuadros 6 y 7 se muestran los resultados obtenidos para el último día de negociación de cada cuatrimestre para ambos modelos.

Cuadro 6
Resultados del modelo de saltos para el último día
de negociación de cada cuatrimestre

Fecha de negociación	S_t	K	σ	r	t	Salto
viernes, 20 de abril de 2007	29 832.4800	22900	17.7373%	7.0337%	0.3347	2294.7824
viernes, 17 de agosto de 2007	28 510.6600	27500	20.2713%	7.1935%	0.3347	337.4612
viernes, 21 de diciembre de 2007	29 638.4000	30800	24.6258%	7.3087%	0.3466	0.0000
viernes, 18 de abril de 2008	31 795.6800	30400	26.6519%	7.4294%	0.3135	465.6719
viernes, 15 de agosto de 2008	27 340.8300	29350	23.6210%	7.6918%	0.3333	0.0000
viernes, 19 de diciembre de 2008	22 221.6400	29500	40.2129%	7.8672%	0.3452	0.0000
viernes, 17 de abril de 2009	22 234.8400	22300	46.5021%	7.1524%	0.3147	0.0000
viernes, 21 de agosto de 2009	28 308.9600	20050	24.1156%	4.9489%	0.3546	2747.5220
viernes, 18 de diciembre de 2009	31 834.0700	24900	18.9901%	4.4994%	0.3267	2300.4849

Fuente: elaboración propia.

Se puede apreciar en los resultados de los cuadros 6 y 7 el mismo fenómeno ocurrido en la valuación del primer día de cada mes, un precio inferior al calculado en BSM para ambos casos, y de la misma forma valores mayores para el caso del modelo de choques (aunque significativamente menores proporcionalmente), en otras palabras, disminuye la diferencia de los valores obtenidos conforme pasa el tiempo. Este fenómeno se puede apreciar más claramente en las gráficas 16-24, en donde periodo por periodo se puede ver el movimiento de los valores de la opción de compra calculados por los modelos de BSM, con saltos y choques, respectivamente.

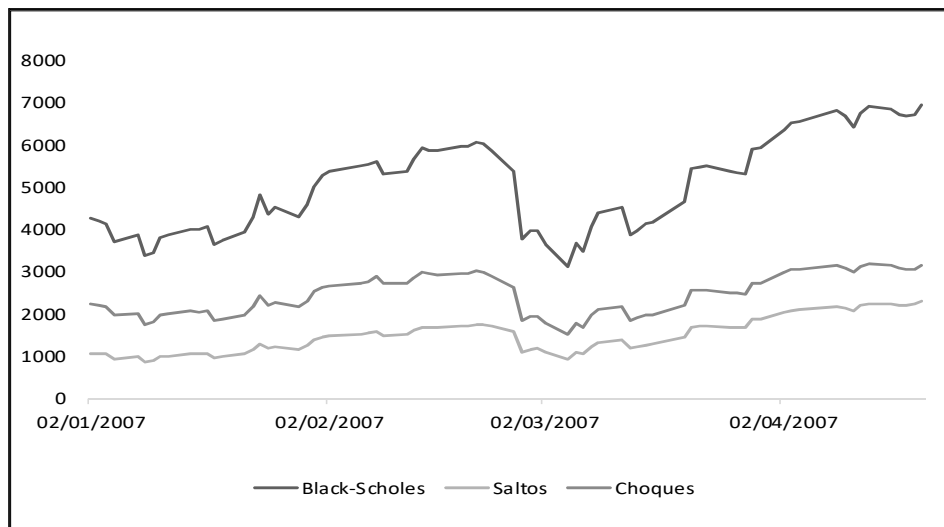
Cuadro 7
Resultados del modelo de choques para el último día
de negociación de cada cuatrimestre

Fecha de negociación	S_t	K	σ	r	t	Choques
viernes, 20 de abril de 2007	29 832.4800	22900	17.7373%	7.0337%	0.3347	3151.1119
viernes, 17 de agosto de 2007	28 510.6600	27500	20.2713%	7.1935%	0.3347	505.7162
viernes, 21 de diciembre de 2007	29 638.4000	30800	24.6258%	7.3087%	0.3466	0.2800
viernes, 18 de abril de 2008	31 795.6800	30400	26.6519%	7.4294%	0.3135	742.2324
viernes, 15 de agosto de 2008	27 340.8300	29350	23.6210%	7.6918%	0.3333	0.0001
viernes, 19 de diciembre de 2008	22 221.6400	29500	40.2129%	7.8672%	0.3452	0.0000
viernes, 17 de abril de 2009	22 234.8400	22300	46.5021%	7.1524%	0.3147	167.6547
viernes, 21 de agosto de 2009	28 308.9600	20050	24.1156%	4.9489%	0.3546	5103.0818
viernes, 18 de diciembre de 2009	31 834.0700	24900	18.9901%	4.4994%	0.3267	3692.1290

Fuente: elaboración propia.

Desde este primer periodo de estudio, representado en la gráfica 16, se observa un movimiento similar (aunque más suave) al de BSM que generan los modelos de saltos y choques. Se observa también un movimiento un tanto paralelo entre los pronósticos de los modelos de saltos y choques, comportamiento en cierta forma obvio pues ambos modelos son una extensión del primero.

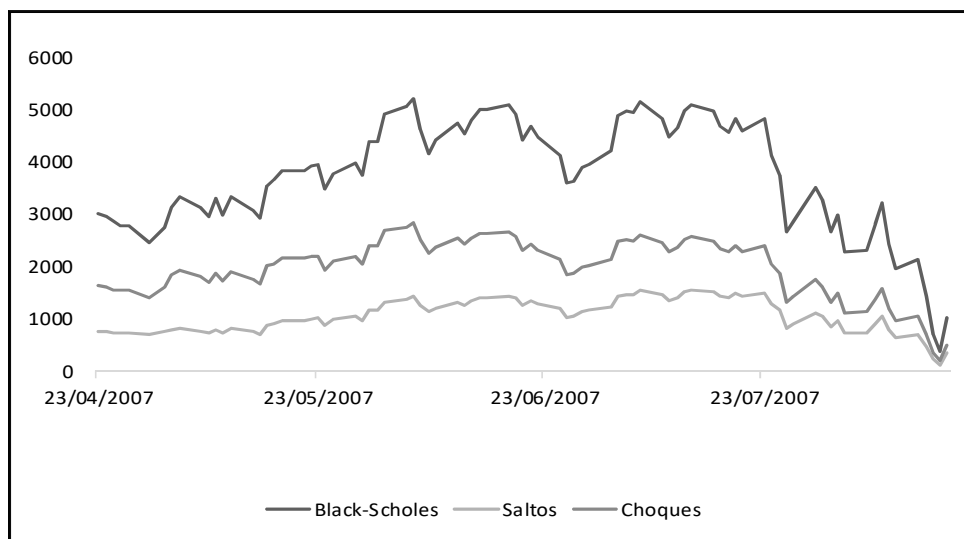
Gráfica 16
Predicciones primer cuatrimestre 2007



Fuente: elaboración propia.

Al observar los resultados del segundo cuatrimestre en la gráfica 17 se verifica el hecho de que conforme se acerca la fecha de vencimiento de la opción, la diferencia de los valores obtenidos disminuye particularmente en los periodos de alta volatilidad, es decir, cuando el mercado se comporta de una manera inestable con movimientos bruscos e inesperados.

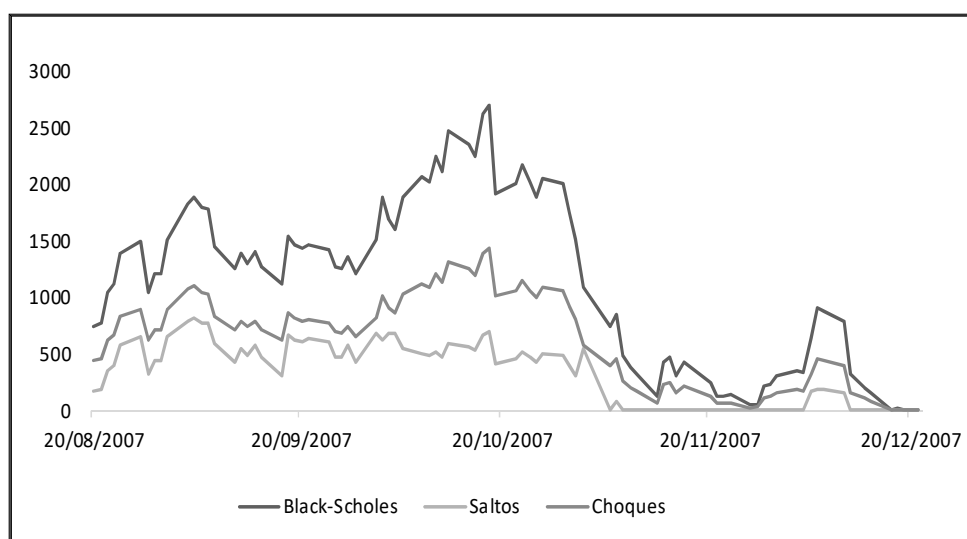
Gráfica 17
Predicciones segundo cuatrimestre 2007



Fuente: elaboración propia.

Ya para el tercer periodo del 2007, mostrado en la gráfica 18, se comienzan a ver valores de cero desde el mes de noviembre para el caso de saltos y solamente al final para el caso de choques y BSM. Esto está de acuerdo con el hecho de que el nivel de cierre del IPC para finales de este periodo estaba por debajo del precio de ejercicio, lo cual conduce a una baja en el precio de la opción para finales de 2007.

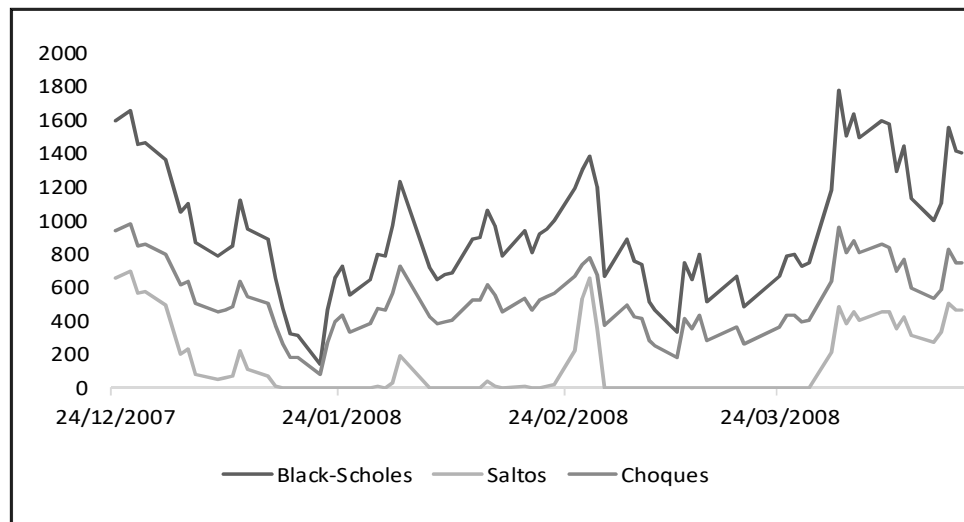
Gráfica 18
Predicciones tercer cuatrimestre 2007



Fuente: elaboración propia.

De acuerdo con la gráfica 19, en el primer cuatrimestre de 2008 se aprecian valores de cero para el caso de saltos en la mayoría de los meses, con excepción de los primeros y últimos 20 días analizados. A pesar de este comportamiento, es interesante observar que en ningún momento el modelo de choques proporciona valores de cero, aun cuando el nivel del IPC únicamente estuvo por arriba del precio de ejercicio al final del periodo, esto se debe al valor del parámetro de aversión al riesgo que fue establecido.

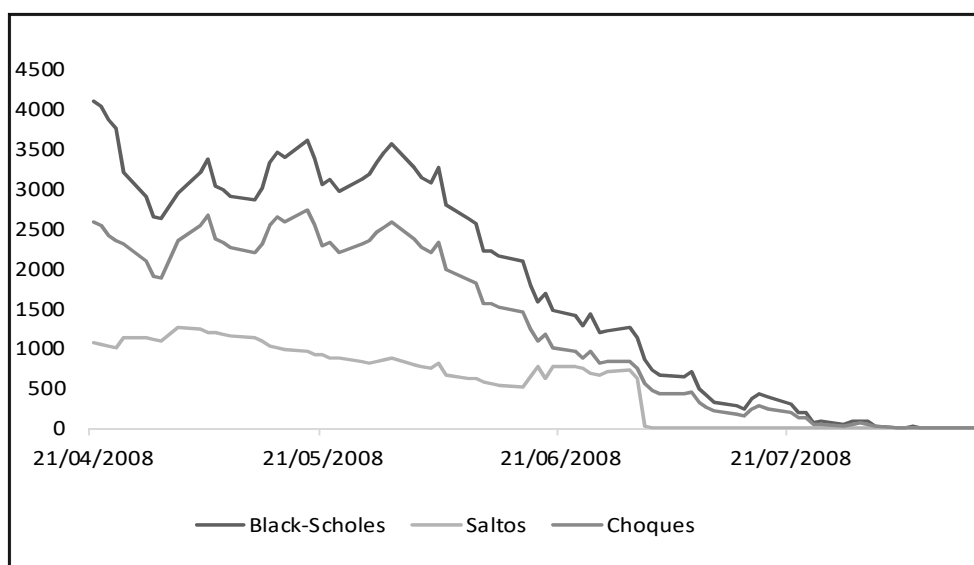
Gráfica 19
Predicciones primer cuatrimestre 2008



Fuente: elaboración propia.

El periodo de crisis tiene su inicio en el segundo cuatrimestre de 2008, lo cual se puede observar claramente en la gráfica 20, pues las predicciones finales de los tres modelos arrojan valores de cero, aunque para la modelación con saltos se tienen valores nulos desde un mes antes de la fecha de vencimiento de la opción.

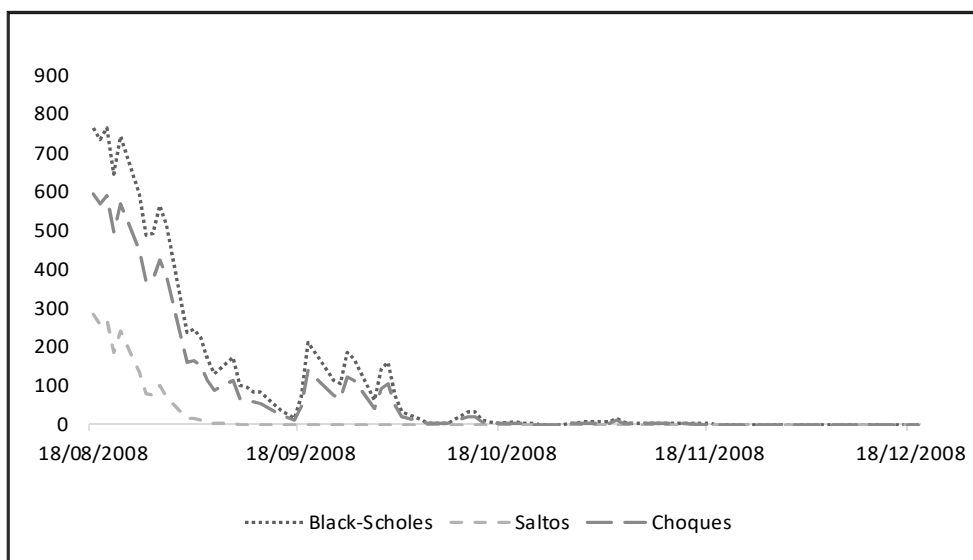
Gráfica 20
Predicciones segundo cuatrimestre 2008



Fuente: elaboración propia.

Es a finales de 2008 que la crisis está en su auge. Este es el periodo en el que el nivel de cierre del IPC en todo momento es inferior al precio de ejercicio y los efectos de este hecho se pueden apreciar en la gráfica 21 en donde la modelación de saltos arroja valores de la opción de cero prácticamente para todo el cuatrimestre, mientras que la modelación de choques es un poco conservadora y arroja valores de cero para mediados de octubre: manteniéndolos hasta el final del año.

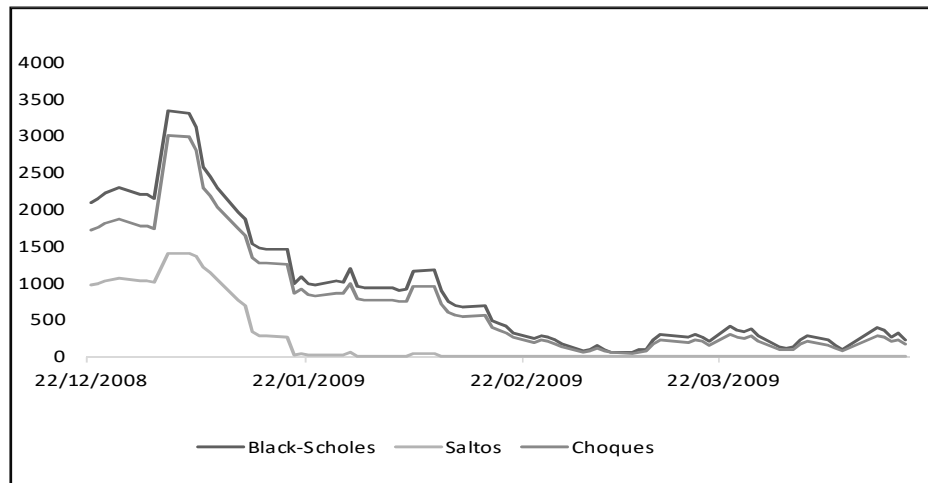
Gráfica 21
Predicciones tercer cuatrimestre 2008



Fuente: elaboración propia.

Para el primer cuatrimestre de 2009 se pueden seguir viendo, en la gráfica 22, los efectos de la crisis. La modelación de saltos sigue manteniendo valores de cero para la mayoría del periodo. Sin embargo, la modelación de choques se mantiene en niveles positivos de durante todo el periodo.

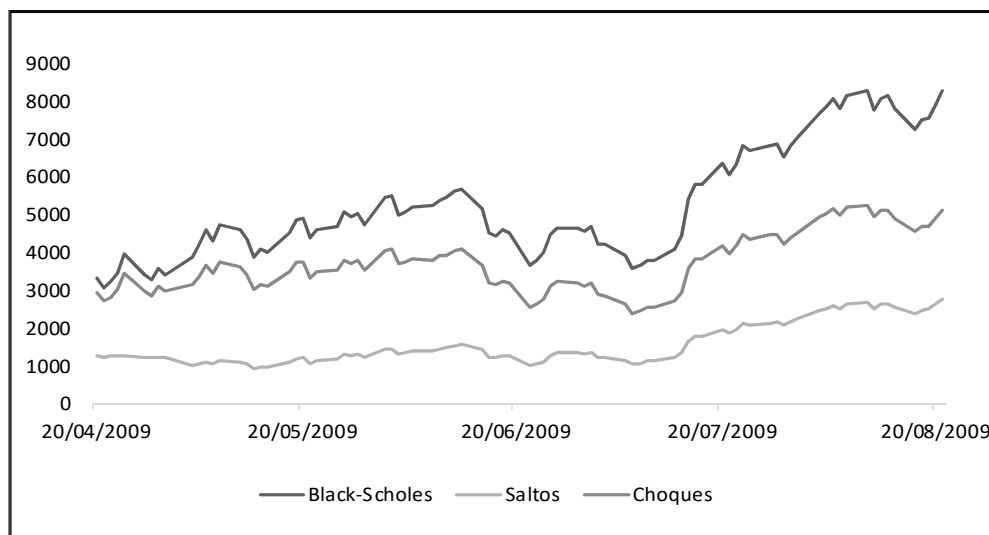
Gráfica 22
Predicciones primer cuatrimestre 2009



Fuente: elaboración propia.

Ya en el segundo cuatrimestre de 2009, como lo muestra la gráfica 23, el mercado empieza a estabilizarse, reflejándose en un movimiento lento pero a la alza en el nivel de cierre del IPC, lo cual se aprecia en los resultados positivos en la valuación para los 3 modelos. En este caso se da el primer aumento de precio si se comparan los valores obtenidos para el primer y último día de negociación de la opción compra.

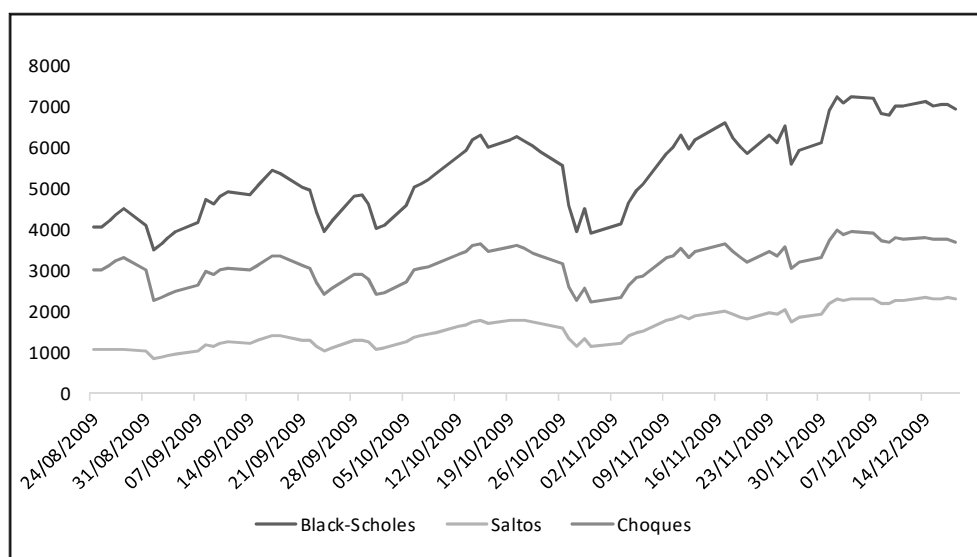
Gráfica 23
Predicciones segundo cuatrimestre 2009



Fuente: elaboración propia.

Cuando pasó el periodo álgido de la crisis, se puede notar en la gráfica 24 un comportamiento similar al del primer cuatrimestre de 2007. En todo momento el nivel de cierre del IPC se sitúa por encima del precio de ejercicio pactado y, con esto, se mantienen primas positivas en la modelación de saltos y choques de la opción de compra.

Gráfica 24
Predicciones tercer cuatrimestre 2009



Fuente: elaboración propia.

Para finalizar, se muestran en los cuadros 8 y 9 las comparaciones de las primas de las opciones de compra obtenidas tanto con BSM, como con la modelación de saltos y la modelación de choques, esto con la finalidad de hacer una contrastación final sobre los resultados obtenidos en esta investigación.

Cuadro 8
Comparación de las primas de la opción para
el primer día de cada cuatrimestre

	Valores de opciones de compra		
Fecha de negociación de la Opción	Black-Scholes	Saltos	Choques
martes, 2 de enero de 2007	4255.58	1056.57	2228.07
miércoles, 2 de mayo de 2007	2744.93	752.19	1612.36
lunes, 3 de septiembre de 2007	1828.14	791.81	1069.67
miércoles, 2 de enero de 2008	1050.51	201.86	613.45
viernes, 2 de mayo de 2008	2944.12	1267.24	2352.05
lunes, 1 de septiembre de 2008	234.46	13.14	159.73
viernes, 2 de enero de 2009	3345.40	1405.26	3009.00
lunes, 4 de mayo de 2009	3886.30	1020.17	3131.79
martes, 1 de septiembre de 2009	3507.24	845.00	2258.40

Fuente: elaboración propia.

Cuadro 9
Comparación de los valores de la opción obtenidos
para el último día de negociación

	Valores de opciones de compra		
Fecha de negociación de la Opción	Black-Scholes	Saltos	Choques
viernes, 20 de abril de 2007	6938.90	2294.78	3151.11
viernes, 17 de agosto de 2007	1018.78	337.46	505.72
viernes, 21 de diciembre de 2007	1.08	0.00	0.28
viernes, 18 de abril de 2008	1405.21	465.67	742.23
viernes, 15 de agosto de 2008	0.00	0.00	0.00
viernes, 19 de diciembre de 2008	0.00	0.00	0.00
viernes, 17 de abril de 2009	232.35	0.00	167.65
viernes, 21 de agosto de 2009	8262.91	2747.52	5103.08
viernes, 18 de diciembre de 2009	6938.53	2300.48	3692.13

Fuente: elaboración propia.

A partir de la información mostrada a lo largo de la presente investigación, se puede verificar que el modelo de Black-Scholes sobrevalúa el precio de las opciones de compra, mientras que el modelo de choques muestra una disminución considerable al momento de valorar dichas opciones, pero es el modelo de saltos el que en todo momento muestra valores inclusive menores que los obtenidos en el modelo de choques, es por esta razón que el modelo de saltos es una mejor alternativa para la estimación de opciones de compra en un ambiente de gran volatilidad.

5. CONCLUSIONES

Como primera evidencia empírica del presente trabajo se tiene que el índice bursátil del mercado mexicano, el IPC, no sigue una distribución normal en el periodo 2007-2009. Por esta razón, el nivel del IPC no se puede representar a través de un movimiento geométrico browniano; supuesto obligatorio del modelo tradicional de BSM. Cuando se mezcla el movimiento geométrico browniano con saltos o choques la distribución resultante deja de ser normal.

Para la estimación de los parámetros de saltos o choques por unidad de tiempo se deben eliminar los movimientos sistemáticos que se presentan en el IPC. Para ello se generó una serie de diferencia de rendimientos logarítmicos entre los niveles de cierre del IPC y la emisora AMX (la cual es la de mayor peso dentro del IPC en el periodo de estudio) y se estimaron el número de saltos o choques obtenidos fuera de una banda de tres desviaciones estándar.

El análisis comparativo entre los modelos de saltos y choques, utilizando como referencia la solución básica de BSM, es que ambos sobrevaloran las primas de las opciones europeas de compra. Esta sobrevaloración se reduce a medida que se acerca el vencimiento de la opción. Aunque el modelo de choques muestra una mejora en la valuación con respecto del BSM, el modelo de saltos proporciona primas más adecuadas. Es decir, el modelo de saltos es una mejor alternativa para la valuación de opciones un ambiente de alta volatilidad.

Bibliografía

- Black, F. and M. Scholes (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". *Journal of Political Economy*, vol. 81, No. 3, pp. 637-654.
- Castillo-Bárceñas, M. A. (2009). Aplicación del modelo de Merton de difusión con saltos para valorar opciones sobre el índice de precios y cotizaciones en un ambiente de alta volatilidad. Tesis de Maestría. Escuela Superior de Economía, IPN. México.
- Cruz-Aké, S.; R. S. García-Ruiz y F. Venegas-Martínez (2013). "Una propuesta para hacer más eficiente el IPC de la BMV: un modelo con reversión a la media para la flotación relativa." *Economía Mexicana*, vol. Cierre de Época (II), pp. 465-495.
- Engler, T., and R. Korn (2014). "Worst-Case Portfolio Optimization under Stochastic Interest Rate Risk". *Risks*, vol. 2, No. 4, pp. 469-488.
- Gómez-Ramos, E. L.; F. Venegas-Martínez y H. Allier-Campuzano (2011). "Análisis comparativo entre modelos GARCH y Redes Neuronales en el pronóstico de los índices bursátiles IPC y Dow Jones". *Eseconomía Revista de Estudios Económicos*, vol. 6, núm. 32. pp. 3-22.
- Jara, D. (2017). Derivados financiero. *Serie de monografías Quantil*, 2017, vol. 2.
- Iliski, K. (1999). Critical Crashes? Manuscript. University of Birmingham, United Kingdom.
- Korn, R. (2007). Optimal portfolio: New variations of an old theme. Computational Management Science, Springer-Verlag. Heidelberg.
- Korn, R. and O. Menkens (2005). "Worst-Case Scenario Portfolio Optimization: a New Stochastic Control Approach". *Mathematical Methods of Operations Research*, vol. 62, No. 1, pp. 123-140.
- Korn, R., and Seifried (2009). A Worst-Case Approach to Continuous-Time Portfolio Optimization. Radon Series of Computational Applied Mathematics, 8.
- Korn, R. and P. Wilmott (2002). "Optimal Portfolios under the Threat of a Crash". *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, vol 5, No. 2, pp 171-187.
- López-Herrera, F. y F. Venegas-Martínez (2012). "Integración financiera México-Estados Unidos: mercados accionarios y de derivados accionarios". *Economía: Teoría y Práctica*, núm. 36, pp. 180-196.
- Menkens, O. (2004). Crash Headging Strategies and Optimal Portfolio. Tesis de Doctorado Universidad de Kaiserslautern, Alemania.
- Mercado Mexicano de Derivados (2017). Antecedentes. recuperado de: <http://www.mexder.com.mx/wb3/wb/MEX/antecedentes>.
- Merton, R. (1976). "Option Pricing when Underlying Stock Return are Discontinuous" *Journal of Financial Economics*, vol. 3, No. 1-2, pp. 125-144.

- Ortiz-Ramírez, A. (2011). Valuación de opciones europeas sobre el IPC con el modelo de Heston y Nandi. En F. Ortiz-Arango Ed. *Avances Recientes en Valuación de Activos y Administración de Riesgos*, Universidad Panamericana, pp. 117-194.
- Sanz-Carnero, B. (2003). Actividad económica y cotizaciones bursátiles. Indicadores bursátiles en España, pp. 1-33.
- Saboyá-Cortes, D.; L. Blanco-Castañeda y F. Venegas-Martínez (2011). Optimización de portafolios con la presencia de sucesos inesperados (choques). En F. Ortiz-Arango Ed. *Avances Recientes en Valuación de Activos y Administración de Riesgos*, Universidad Panamericana, pp. 339- 362.
- Vélez-Pareja, I. y L. Machain (2003). Análisis de inversiones bajo riesgo: Simulación (Including the Risk on the Analysis: Monte Carlo Simulation). *SSRN Electronic Journal*.
- Venegas-Martínez, F. (2001). "Opciones, cobertura y procesos de difusión con saltos: una aplicación a los títulos de GCARSO". *Estudios Económicos*, vol. 16, núm. 32, pp. 203-226.
- Venegas-Martínez, F. (2006). *Riesgos financieros y económicos: productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre*. Segunda edición. Cengage Learning. México.
- Venegas-Martínez, F. (2007). "Una introducción a los procesos de Lévy y su aplicación a la valuación de opciones". *Panorama Económico*, vol. 2, No. 4, pp. 35-68.
- Venegas-Martínez, F. (2000). "On Consumption, Investment, and Risk" *Economía Mexicana, Nueva Época*, vol. 9, No. 2, pp. 227-244.
- Venegas-Martínez, F. y S. Cruz Aké (2010). "Productos derivados sobre bienes de consumo" *EconoQuantum*. vol. 6, núm. 2, pp. 25-54.
- Venegas-Martínez, F.; A. Rodríguez-Nava y A. Ortiz-Ramírez (2012). "Decisiones óptimas de consumo y portafolio con una restricción probabilista sobre riqueza final: difusiones con saltos y horizonte finito". *Estocástica: Finanzas y Riesgo*, vol. 3, núm. 1, pp. 23-38.
- Vilariño-Sanz, Á. (2010). "Derivados". *Revista de Economía Crítica*, núm. 11, pp. 96-130.
- Zambrano-Reyes, A. y F. Venegas-Martínez (2016). "Valuación de opciones arcoíris y sobre canastas de activos bajo procesos de difusión con saltos". *Revista Contaduría y Administración*, vol. 61, núm. 2. pp. 374-390.